

# DM1 - PSI\* - 2025-2026

**Exercice 1.** Déterminer la primitive de la fonction cosinus s'annulant en 0 en utilisant les sommes de Riemann.

**Problème 1.** La transformation d'Abel; application à la convergence de séries trigonométriques

**Partie I.** Transformation d'Abel

Soient  $(a_k)_{k \geq 1}$  et  $(b_k)_{k \geq 1}$  deux suites réelles ou complexes. Soit, pour tout  $n \geq 1$ , la somme partielle

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

1. Montrer l'identité suivante (transformation d'Abel) :

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

2. On suppose que  $(A_k)_k$  est bornée et que  $(b_k)_k$  est positive, décroissante et de limite nulle. Montrer la convergence de la série de terme général  $a_k b_k$ . Ce résultat, appelé *théorème d'Abel*, est utilisé dans la suite de l'exercice.

3. Soit  $\zeta \neq 1$  un complexe de module 1. Montrer que la série de terme général  $\frac{\zeta^k}{\ln k}$  est convergente. Est-elle absolument convergente ?

4. On dit que la série réelle  $\sum u_n$  est une *série alternée* si, pour tout  $n$ ,  $u_n u_{n+1} \leq 0$ ,  $\lim u_n = 0$  et si  $(|u_n|)_n$  est décroissante. En utilisant le théorème d'Abel, montrer que les séries alternées sont convergentes.

**Partie II.** On s'intéresse dans cette partie à la convergence des séries

$$S_\alpha(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k^\alpha} \quad \& \quad C_\alpha(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k\theta)}{k^\alpha}.$$

5. Traiter le cas  $\theta \in \pi\mathbb{Z}$ .

6. Quelle est la nature des deux séries pour  $\alpha > 1$  ?

7. Déterminer la nature des séries  $C_\alpha(\theta)$  et  $S_\alpha(\theta)$  si  $0 < \alpha \leq 1$ .

8. Étudier la périodicité et la parité de  $S_\alpha$  et de  $C_\alpha$ . En déduire qu'il suffit d'étudier ces fonctions sur l'intervalle  $]0, \pi[$ . On suppose désormais que  $0 < \theta < \pi$ .

9. Montrer que, pour  $0 < \alpha \leq 1$ , les séries  $C_\alpha(\theta)$  et  $S_\alpha(\theta)$  sont *semi-convergentes*, c'est-à-dire convergentes, mais pas absolument convergentes. On pourra remarquer que, pour tout réel  $x$ ,  $|\cos x| \geq \cos^2 x$ .

10. Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[a, b]$ . Montrer le lemme de Riemann-Lebesgue :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}: \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = 0.$$

11. Vérifier que

$$\forall (n, \theta) \in \mathbb{N}^* \times ]0, \pi[: \sum_{k=1}^n \cos(kt) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}.$$

En écrivant  $-\frac{\sin(k\theta)}{k}$  comme une intégrale entre  $\theta$  et  $\pi$ , en déduire une expression intégrale des sommes partielles de  $S_1(\theta)$ .

12. En déduire la somme de la série  $S_1(\theta)$  sur  $[0, \pi]$  et la représenter sur  $[-2\pi, 2\pi]$ .

**Exercice 1.** Rappelons le théorème relatif aux sommes de Riemann. Si  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  est continue, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt.$$

La formule se comprend facilement en interprétant les deux sommes comme les sommes des aires des rectangles à gauche pour la première, à droite pour la deuxième. Il s'agit donc ici d'évaluer les sommes de Riemann correspondant à l'intégrale  $\int_0^x \cos t dt$ . En passant par l'exponentielle complexe, qui permet d'introduire une somme géométrique, et en considérant les rectangles à gauche, ici plus pratiques, il vient

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{ikx}{n}\right) = \frac{e^{ix} - 1}{e^{ix/n} - 1} = \frac{e^{ix/2} - 1}{e^{ix/2n} - e^{-ix/2n}} \times \frac{e^{ix/2} - e^{-ix/2}}{e^{ix/2n} - e^{-ix/2n}} = e^{i(n-1)x/2n} \frac{2i \sin(x/2)}{2i \sin(x/2n)}$$

$$\therefore \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{kx}{n}\right) = \frac{x}{n} \operatorname{Re}(S_n(x)) = \frac{x \cos\left(\frac{(n-1)x}{2n}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{n \sin\left(\frac{x}{2n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin x,$$

en utilisant *in fine* l'équivalent  $\sin u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$  et la continuité de la fonction cosinus. Le résultat n'est pas trop surprenant...

On peut aussi utiliser les formules de trigonométrie (c'est facile si l'on connaît le résultat, plus astucieux sinon...)

$$2 \sin\left(\frac{x}{2n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{kx}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} 2 \sin\left(\frac{x}{2n}\right) \cos\left(\frac{kx}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[ \sin\left(\frac{(2k+1)x}{2n}\right) - \sin\left(\frac{(2k-1)x}{2n}\right) \right]$$

$$= \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2n}\right) + \sin\left(\frac{x}{2n}\right) \quad \therefore \quad \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{kx}{n}\right) = \frac{x \sin\left(\frac{(2n-1)x}{2n}\right) + x \sin\left(\frac{x}{2n}\right)}{2n \sin\left(\frac{x}{2n}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sin x.$$

Les deux expressions de la somme de Riemann sont distinctes, mais bien évidemment égales.

### Problème 1. Partie I

1. Le plus simple est de raisonner par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 1$ , l'identité est  $a_1 b_1 = a_1 b_1$ . En admettant la formule à l'ordre  $n$ , il vient

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n + (A_{n+1} - A_n) b_{n+1} = \sum_{k=1}^n A_k (b_k - b_{k+1}) + A_{n+1} b_{n+1}.$$

Il est toutefois plus élégant, et pas vraiment plus compliqué, d'obtenir la formule directement, ce qui ne présuppose pas sa connaissance : en posant  $A_0 = 0$ , il vient

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = -A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n.$$

La transformation d'Abel est une version discrète de l'intégration par parties, fort utile. Naguère au programme, on la retrouve de temps en temps dans les problèmes en question intermédiaire.

2. On suppose qu'il existe  $M$  tel que, pour tout  $k$ ,  $|A_k| \leq M$  et que  $(b_k)_k$  est décroissante et positive. Alors, la suite  $(b_k - b_{k+1})_k$  est positive et l'on peut majorer

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k (b_k - b_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^{n-1} M |b_k - b_{k+1}| = M \sum_{k=1}^{n-1} (b_k - b_{k+1}) = M (b_1 - b_n) \leq M b_1.$$

Il s'ensuit que la série de terme général  $A_k (b_k - b_{k+1})$  est absolument convergente, donc convergente. Comme, de plus,  $A_n b_n = \mathcal{O}(b_n)$  et que  $\lim b_n = 0$  par hypothèse, on a donc  $\lim A_n b_n = 0$  et la série de terme général  $a_k b_k$

converge et l'on a, ce qui n'est pas demandé,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1}).$$

3. Pour un complexe  $\zeta$  de module 1 différent de 1, on a

$$\sum_{k=1}^n \zeta^k = \zeta \frac{1 - \zeta^n}{1 - \zeta} \quad \therefore \quad \left| \sum_{k=1}^n \zeta^k \right| \leq \frac{2}{|1 - \zeta|}.$$

Comme la suite  $\left(\frac{1}{\ln k}\right)_{k \geq 2}$  est décroissante et de limite nulle, les hypothèses du théorème prouvé à la deuxième question sont vérifiées, d'où la convergence de la série. Si  $\zeta = 1$ , on ne peut pas l'appliquer, et ce n'est pas étonnant, vu que la série de terme général  $1/\ln k$  est divergente (on a  $\frac{1}{\ln k} > \frac{1}{k}$  pour tout  $k \geq 2$ ). Ainsi, pour  $\zeta \neq 1$ , la série  $\sum \frac{\zeta^k}{\ln k}$  est convergente, mais pas absolument convergente. On dit parfois qu'elle est *semi-convergente* (ou on ne dit rien du tout car le terme n'est pas très heureux).

4. Avec les notations des questions 1. et 2., si l'on pose  $a_k = (-1)^k$ , alors  $A_n \in \{-1, 0\}$  et la suite  $(A_n)_n$  est donc bornée. Les autres hypothèses —  $(b_k)_k$  décroissante de limite nulle — sont conjointement celles du critère spécial et de la question 2. Le critère se déduit donc de la question 2.

## Partie II

5. Posons  $\theta = n\pi$ . Alors, la série  $S_\alpha(n\pi)$  est la série nulle. Ce n'est pas passionnant, mais elle converge. On a

$$C_\alpha(2p\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \& \quad C_\alpha((2p+1)\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}.$$

Il s'ensuit que  $C_\alpha(2p\pi)$  converge si, et seulement si,  $\alpha > 1$  (série de Riemann) et que  $C_\alpha((2p+1)\pi)$  converge, si, et seulement si,  $\alpha > 0$  (série de Riemann alternée, semi-convergente si  $0 < \alpha \leq 1$ , question 4).

6. Le terme général des deux séries se majore en valeur absolue par  $k^{-\alpha}$  d'où la convergence absolue si  $\alpha > 1$ .

7. Le raisonnement fait à la question 3 s'applique à la série  $\sum \frac{e^{ik\theta}}{k^\alpha}$  en remplaçant  $\ln k$  par  $k^\alpha$ , ce qui donne la convergence de la série complexe, d'où celle de  $C_\alpha(\theta)$  et de  $S_\alpha(\theta)$ , qui en sont respectivement les parties réelle et imaginaire.

8. Les deux questions précédentes montrent que  $S_\alpha$  et  $C_\alpha$  sont bien définies sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $\alpha > 0$ . Il est clair que  $S_\alpha$  est impaire et que  $C_\alpha$  est paire. Enfin,  $e^{ik(\theta+T)} = e^{ik\theta} e^{ikT}$ , donc  $\theta \mapsto e^{ik\theta}$  est  $\frac{2\pi}{k}$  périodique. Il s'ensuit que  $C_\alpha$  et  $S_\alpha$  sont  $2\pi$ -périodiques ce qui, associé à leur parité et au fait que l'on connaît les fonctions sur  $\pi\mathbb{Z}$ , justifie que l'on peut se contenter de les étudier sur  $]0, \pi[$ .

9. Ainsi qu'obligamment suggéré par l'énoncé, on a, pour tout  $(k, \theta) \in \mathbb{N}^* \times ]0, \pi[$ ,

$$|\cos(k\theta)| \geq \cos^2(k\theta) = \frac{1 + \cos(2k\theta)}{2} \geq 0.$$

Pour  $0 < \alpha \leq 1$ , on en déduit la divergence de la série de terme général  $\frac{|\cos(k\theta)|}{k^\alpha}$ , minorée par la somme d'une série convergente — de terme général  $\frac{\cos(2k\theta)}{2k^\alpha}$  — et d'une série divergente — de terme général  $\frac{1}{2k^\alpha}$  —, donc positive divergente.

On raisonne de manière similaire pour  $S_\alpha(\theta)$  en utilisant

$$|\sin(k\theta)| \geq \sin^2(k\theta) = \frac{1 - \cos(2k\theta)}{2}.$$

Conclusion : les séries  $S_\alpha(\theta)$  et  $C_\alpha(\theta)$  sont convergentes, non absolument convergentes, *i.e.* semi-convergentes.

10. On réalise une intégration par parties en dérivant la fonction. Avec  $\lambda > 0$ , il vient

$$\int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt = \left[ -\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} f(t) \right]_a^b + \int_a^b \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} f'(t) dt \quad \dots$$

$$\left| \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt \right| \leq \frac{|f(a)| + |f(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_a^b |f'(t)| dt \underset{\lambda \rightarrow \infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0.$$

Remarque : avec des notations classiques sur les espaces vectoriels normés, la majoration s'écrit

$$\left| \int_a^b \sin(\lambda t) f(t) dt \right| \leq \frac{2 \|f\|_\infty + \|f'\|_1}{\lambda}.$$

11. C'est peu ou prou la formule obtenue dans l'exercice, c'est pourquoi il est simplement demandé de la vérifier, ce qui est plus simple que de l'obtenir et peut se faire par récurrence (même si la méthode proposée dans le corrigé de l'exercice est meilleure) :

- pour  $n = 1$ , c'est la formule  $2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos \theta = \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , cas particulier de la formule de linéarisation  $2 \sin a \cos b = \sin(a + b) + \sin(a - b)$ .
- On suppose maintenant la formule correcte à l'ordre  $n - 1$ . Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) &= \frac{\sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} + \cos(n\theta) = \frac{\sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta\right) + 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos(n\theta)}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta\right) + \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2 \sin \frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

en utilisant la même formule de linéarisation.

On écrit à présent  $-\frac{\sin(k\theta)}{k} = \int_\theta^\pi \cos(kt) dt$ , d'où

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k} = - \int_\theta^\pi \sum_{k=1}^n \cos(kt) dt = \int_\theta^\pi \left( \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{2 \sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2} \right) dt.$$

12. On reprend l'expression obtenue à la question précédente :

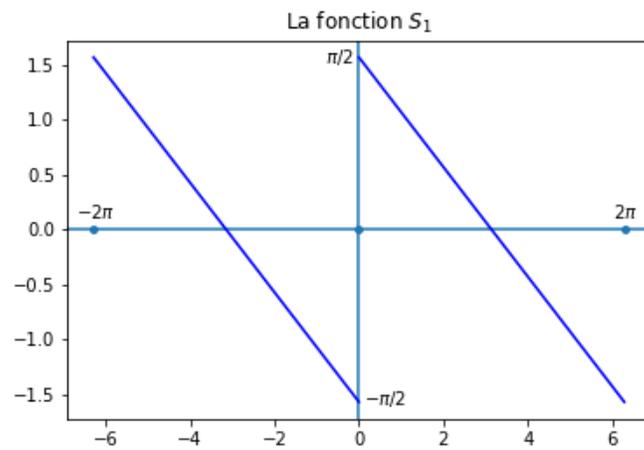
$$\sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi - \theta}{2} - \int_\theta^\pi \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \times \frac{dt}{2 \sin \frac{t}{2}} \underset{n \rightarrow \infty}{\longrightarrow} \frac{\pi - \theta}{2}.$$

En effet, la fonction  $\sin(t/2)$  ne s'annulant pas sur le segment  $[\theta, \pi]$ , la fonction  $t \mapsto \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}}$  y est de classe  $\mathcal{C}^1$  et le lemme de Riemann-Lebesgue s'applique.

On a ainsi  $S_1(\theta) = \frac{\pi - \theta}{2}$  pour tout  $\theta \in ]0, \pi[$  et l'on constate que la formule vaut aussi en  $\pi$  (mais pas en 0). Comme  $S_1$  est impaire et  $2\pi$ -périodique, cela permet de trouver l'expression sur  $[\pi, 2\pi[$  :

$$\forall \theta \in [\pi, 2\pi[ : S_1(\theta) = S_1(\underbrace{\theta - 2\pi}_{\in [-\pi, 0]}) = -S_1(\underbrace{2\pi - \theta}_{\in ]0, \pi]}) = -\frac{\pi - (2\pi - \theta)}{2} = \frac{\pi - \theta}{2}.$$

La formule est donc vraie sur  $]0, 2\pi[$  et l'on conclut par imparité.



```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
plt.axhline()
plt.axvline()
X, Y = np.array([0, 2 * np.pi]), np.array([np.pi / 2, -np.pi / 2])
plt.plot(X, Y, color = 'blue')
plt.plot(-X, -Y, color = 'blue')
plt.scatter([-2 * np.pi, 0, 2 * np.pi], [0, 0, 0], s = 15)
plt.annotate(text = '$-2\pi$', xy = (-6.7, 0.1))
plt.annotate(text = '$2\pi$', xy = (6, 0.1))
plt.annotate(text = '$\pi/2$', xy = (-0.82, 1.52))
plt.annotate(text = '$-\pi/2$', xy = (0.1, -1.6))
plt.title("La fonction  $S_1$ ")
plt.savefig("S1-DM1_25-26.png")
plt.show()
```