6. Continuité par morceaux– Corrigés

Exercice 5. 1. Soient $f \in \mathcal{C}^0_{\text{p.m.}}(I)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J)$. L'hypothèse $f(I) \subset J$ permet de définir la fonction $g \circ f$. Soient $[a,b] \subset I$ et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$. Alors, les restrictions de $g \circ f$ aux intervalles ouverts $]x_i, x_{i+1}[$ sont continues par composition de deux fonctions continues et admettent des limites à droite en x_i et à gauche en x_{i+1} par composition des limites. Comme J est un segment, la fonction g est continue sur un segment, donc bornée, donc ces limites sont finies et $g \circ f$ est donc continue par morceaux.

Si J n'est pas un segment, cela n'est plus nécessairement le cas, comme le montre le contrexemple suivant : $f\colon [0,1] \to]0,1]$ définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = x$ si $x \in]0,1]$ et $g\colon]0,1] \to \mathbb{R}_+$ définie par $g(x) = 1/x$. Alors, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g \circ f(x) = +\infty$ et $g \circ f$ n'est donc pas continue par morceaux.

2. Il est clair que $f \circ g$ est bien définie, puisque $g(J) \subset I$. Posons $g(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, prolongée par continuité en 0 (par la valeur 0). Alors, g est continue sur, disons, le segment $[0,1]$, la fonction d'Heaviside H est continue par morceaux et $H \circ g\colon [0,1] \to \{0,1\}$ est discontinue en tout point de la forme $x = \dfrac{1}{k\pi}$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, donc en un nombre infini de points, ce qui montre qu'elle n'est pas continue par morceaux.

3. Par hypothèse, f est continue et strictement monotone et réalise donc par restriction une bijection du segment $J = [a,b]$ sur son image K, qui est un segment inclus dans I. La restriction $f_{|K}$ est continue par morceaux. Soit $y_0 < y_1 < \cdots < y_n$ une subdivision associée à $f_{|K}$. Posons $x_i = f^{-1}(y_i)$ si f est strictement croissante et $x_i = g^{-1}(y_{n-i})$ si f est décroissante.

Alors, $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ forme une subdivision de $[a,b]$ associée à la fonction $g \circ f$; en effet, g envoie $]y_i, y_{i+1}[$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ si g est croissante (resp. $]y_{n-i}, y_{n-i+1}[$ si g est décroissante) donc la restriction de $f \circ g$ à cet intervalle est continue. La composition des limites assure que $f \circ g$ admet des limites finies à droite et à gauche des points de la subdivision donnée par les x_i, qui sont les limites à droite et à gauche de g aux points y_i, ce qui clôt la justification.

Remarque. Si g est croissante, mais non strictement croissante. Alors, g^{-1} n'est pas définie, mais l'image réciproque $g^{-1}\big(\{y_i\}\big)$ est, elle, bien définie, et est égale à un segment inclus dans $[a,b]$. On prend alors pour subdivision l'ensemble des extrémités de ces segments. Le raisonnement est le même que dans le cas strictement croissant, à ceci près que s'ajoutent d'éventuels intervalles sur lesquels $f \circ g$ induit par restriction une fonction constante.

Exercice 6. Un sens est évident : la somme d'une fonction continue et d'une fonction continue en escalier est la somme de deux fonctions continues par morceaux et est donc continue par morceaux (structure d'espace vectoriel).

Soit $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ la subdivision minimale associée, constituée, comme on le sait, des points de discontinuité de f. Notons $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Comme suggéré, on commence par le cas où, pour tout $x_i \in \mathcal{S}$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_i \\ x \neq x_i}} f(x) = \ell_i$ existe. Soit $\tilde{f}$ le prolongement par continuité de $f_{|[a,b] \setminus \mathcal{S}}$ à $[a,b]$. Ce prolongement existe bien (du fait de la coïncidence des limites à droite et à gauche aux points x_i) et est défini par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin \mathcal{S} \\ \ell_i & \text{si } x = x_i. \end{cases}$. Alors,

$$e = f - \tilde{f} = \sum_{i=0}^{n} \big(f(x_i) - \ell_i\big) \mathbb{1}_{\{x_i\}}$$

est bien une fonction en escalier (en l'occurrence, nulle partout sauf en un nombre fini de points) et l'on a $f = \tilde{f} + e$, comme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier.

On suppose maintenant que f est seulement continue par morceaux. On lui associe de même sa subdivision minimale $\mathcal{S} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. On va décomposer f en la somme d'une fonction g_1 vérifiant les hypothèses du cas précédent et d'une fonction en escalier. Il faut pour cela « corriger » les sauts de α_i à β_i aux points x_i, où

$$\forall i \in [\![1, n-1]\!] \colon \alpha_i = \lim_{\substack{x \to x_i \\ x < x_i}} f(x) \quad \& \quad \beta_i = \lim_{\substack{x \to x_i \\ x > x_i}} f(x).$$

Posons ainsi $e = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i - \alpha_i) \mathbb{1}_{]x_i, b]}$ et $g = f - e$. Il est clair que e est en escalier comme somme de fonctions indicatrices d'intervalles, donc somme de fonctions en escalier, lesquelles forment un espace vectoriel. Soit alors $j \in [\![1, n-1]\!]$. On a

$$\lim_{\substack{x \to x_j \\ x > x_j}} g(x) - \lim_{\substack{x \to x_j \\ x < x_j}} g(x) = \left[\beta_j - \sum_{i=1}^{j} (\beta_i - \alpha_i)\right] - \left[\alpha_j - \sum_{i=1}^{j-1} (\beta_i - \alpha_i)\right] = 0,$$

ce qui montre que g vérifie bien les hypothèses du premier cas et termine la démonstration.

Attention à bien considérer la fonction e proposée et pas $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} (\beta_i - \alpha_i) \mathbb{1}_{]x_i, x_{i+1}]}$ car les décalages s'additionnent alors au fur et à mesure.

Exercice 7. 1. Il est clair que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. La fonction sinus étant bornée, on a $\varphi(x) \underset{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}}{=} \mathcal{O}(x^2)$, donc on peut prolonger φ en une fonction continue par $\varphi(0) = 0$.

Pour la dérivabilité (et la dérivée) de φ en 0 il faut revenir à la définition et l'on trouve $\dfrac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = x \sin(1/x) = \mathcal{O}(x)$, donc $\varphi'(0) = 0$. Enfin, sur $\mathbb{R}^*$, on calcule

$$\varphi'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Le premier terme a pour limite 0 quand x tend vers 0 et, pour $x_k = \dfrac{1}{k\pi}$, on a $\cos(1/x_k) = (-1)^k$, qui n'a pas de limite quand k tend vers l'infini, donc assure que φ' n'a pas de limite en 0. Ainsi, φ est une fonction dérivable, mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Par hypothèse, on a $f(a+h) - f(a) \underset{\substack{h \to 0 \\ h > 0}}{\sim} hf'(a) < 0$, ce qui montre que f prend, au voisinage de a, des valeurs strictement inférieures à $f(a)$. De même, $f(b) - f(b-h) \underset{\substack{h \to 0 \\ h > 0}}{\sim} hf'(b) > 0$, ce qui montre que f prend, au voisinage de b, des valeurs strictement inférieures à $f(b)$.

La fonction f étant continue sur le segment $[a, b]$, elle admet un minimum, atteint en, disons, $c \in [a, b]$. La discussion locale ci-dessus montre que $c \notin \{a, b\}$, soit $c \in]a, b[$, d'où $f'(c) = 0$.

Alternativement, la discussion locale montre qu'il existe $h_1 > 0$ tel que $f(a + h_1) < f(a)$ et $h_2 > 0$ tel que $f(b - h_2) < f(b)$. Corrélativement, f n'est pas strictement monotone sur $[a, b]$. Or, on sait qu'une fonction continue et injective est strictement monotone (corollaire du TVI). Donc f n'est pas injective et il existe $a \leqslant u < v \leqslant b$ tels que $f(u) = f(v)$. Le théorème de Rolle permet de conclure à l'existence d'un zéro de f'.

3. Supposons que $f'(a) < \ell < f'(b)$. Alors, la fonction g définie par $g(t) = f(t) - \ell t$ vérifie les hypothèses de la question 2, d'où l'existence de c tel que $f'(c) = g'(c) + \ell = \ell$. Si $f'(a) > \ell > f'(b)$, on se ramène au cas précédent en considérant $-f$.

Exercice 8. 1. Si f et g appartiennent à $\mathcal{C}^0_{p.m.}(([a, b])$ et si σ_f (resp. σ_g) sont les subdivisions minimales associées à f (resp. g), alors $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fois, à f, à g et à toute combinaison linéaire $\lambda f + \mu g$ de ces deux fonctions. En particulier, sur tout intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ de σ, on a

$$\widetilde{\lambda f + \mu g}_{(x_i, x_{i+1})} = \lambda \tilde{f}_{(x_i, x_{i+1})} + \mu g_{(x_i, x_{i+1})}.$$

Alors, la linéarité de l'intégrale des fonctions continues sur $[x_i, x_{i+1}]$ et le théorème et définition 1 donnent

$$\int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \widetilde{\lambda f+\mu g}_{(x_i,x_{i+1})}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\left[\lambda\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{(x_i,x_{i+1})}(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_{(x_i,x_{i+1})}(t)\,\mathrm{d}t\right]$$
$$=\lambda\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_{(x_i,x_{i+1})}(t)\,\mathrm{d}t+\mu\sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_{(x_i,x_{i+1})}(t)\,\mathrm{d}t=\lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t+\mu\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

2. On considère la subdivision $\mathcal{S}=\mathcal{S}_0\cup\{b\}$, où $\mathcal{S}_0$ est la subdivision minimale de f et on applique le théorème et définition 1.

Exercice 12. 1. Comme la fonction $\sin(x^{-\beta})$ n'a pas de limite en 0 (car $\beta>0$, d'où $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^{-\beta}=+\infty$) et est bornée, $f_{\alpha,\beta}$ se prolonge par continuité en 0 si, et seulement si, $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^{\alpha}=0$, donc pour $\alpha>0$.

2. Les formules de dérivation donnent $f'_{\alpha,\beta}(x)=\alpha x^{\alpha-1}\sin(x^{-\beta})-\beta x^{\alpha-\beta-1}\cos(x^{-\beta})$ pour $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Toutefois, l'on sait que si $f'_{\alpha,\beta}(x)$ admet une limite finie quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, alors $f_{\alpha,\beta}$ est dérivable à droite en 0 et sa dérivée à droite en 0 est la valeur de cette limite. Montrons que c'est le cas si, et seulement si, $\alpha-\beta-1>0$ et qu'alors, la limite est nulle : la condition est clairement suffisante, puisque les deux puissances de x tendent alors vers 0. Dans le cas contraire, considérons la suite des $f_{\alpha,\beta}(x_k)$ avec $x_k^{-\beta}=2k\pi$, $k\in\mathbb{N}^*$; on a alors $f'_{\alpha,\beta}(x_k)=-\beta x_k^{\alpha-\beta-1}$, qui est de limite infinie.

Malheureusement, cette approche ne donne qu'une condition suffisante de dérivabilité en 0. C'est pourquoi il faut se ramener au taux d'accroissement, ce qui est très facile car $\dfrac{f_{\alpha,\beta}(x)-f_{\alpha,\beta}(0)}{x-0}=f_{\alpha-1,\beta}(x)$. Ainsi, par la première question, $f_{\alpha,\beta}$ est dérivable en 0 si, et seulement si, $\alpha>1$ et l'on a alors $f'_{\alpha,\beta}(0)=0$. Ce qui précède montre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ si, et seulement si, $\alpha-\beta-1>0$.

3. Supposons que $f_{\alpha,\beta}$ est dérivable en 0, donc que $\alpha-\beta-1>0$. On calcule à nouveau le taux d'accroissement :

$$\frac{f'_{\alpha,\beta}(x)-f'_{\alpha,\beta}(0)}{x-0}=\frac{f'_{\alpha,\beta}(x)}{x}=\alpha x^{\alpha-2}\sin(x^{-\beta})-\beta x^{\alpha-\beta-2}\cos(x^{-\beta})$$

admet une limite finie en 0 si, et seulement si $\alpha-\beta-2>0$ (par exactement le même raisonnement que pour la dérivée).

Pour avoir un développement limité à l'ordre n de $f_{\alpha,\beta}$, il suffit d'avoir $f_{\alpha,\beta}(x)\underset{x\to0}{=}\mathfrak{o}(x^n)$, donc $\alpha>n$. Ainsi, en prenant par exemple $\beta=\alpha=n+1$, la fonction $f_{\alpha,\beta}$ admet un développement limité à l'ordre n, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Exercice 13. 1. Appliquons la formule de Taylor-Young à l'ordre deux en 0. Il vient

(1) $$f(2h)=f(0)+2hf'(0)+\frac{(2h)^2}{2\,!}f''(0)+o((2h)^2)=f(0)+2hf'(0)+2h^2f''(0)+o(h^2)$$

(2) $$f(h)=f(0)+hf'(0)+\frac{h^2}{2\,!}f''(0)+o(h^2)$$

En faisant $(1)-2*(2)+f(0)$, il vient $f(2h)-2f(h)+f(0)=h^2f''(0)$. La limite demandée est donc

$$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-2f(h)+f(0)}{h^2}=f''(0).$$

En poussant le développement limité à l'ordre 3, on trouve de même

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3h)-3f(2h)+3f(h)-f(0)}{h^3}=f'''(0).$$

2. L'idée est de calculer de deux manières différentes le DL à l'ordre n en 0 de la fonction $T(x)=(1-\mathrm{e}^x)^n$ et d'identifier les coefficients de ce développement limité.

En 0, on a $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$, d'où $(1-\mathrm{e}^x)^n \sim (-1)^n x^n$. En termes de DL, cela s'écrit

$$T(x) = (1-\mathrm{e}^x)^n = (-1)^n x^n + o(x^n) = 0 + 0.x + \cdots + 0.x^m + \cdots + 0.x^{n-1} + (-1)^n x^n + \mathfrak{o}(x^n).$$

D'après la formule du binôme, puis en dérivant r fois et en prenant enfin $x=0$, il vient successivement

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{kx}, \quad T^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^r \mathrm{e}^{kx}$$

$$T^{(r)}(0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^r.$$

D'autre part, T est de classe C^∞ et l'on peut appliquer la formule de Taylor-Young :

$$T(x) = \sum_{r=0}^{n} \frac{T^{(r)}(0)}{r\,!} x^r + \mathfrak{o}(x^n).$$

Or, le DL est unique et l'on peut identifier avec le résultat obtenu à la question précédente, ce qui donne bien

$$\frac{T^{(r)}(0)}{r\,!} = \frac{1}{r\,!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^r = \begin{cases} 0 & \text{si } r < n, \\ (-1)^n & \text{si } r = n. \end{cases} \tag{3}$$

3. On généralise le calcul effectué à la première question. La formule de Taylor-Young donne, pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$f(kh) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(kh)^r}{r\,!} f^{(r)}(0) + \mathfrak{o}(k^n h^n) = \sum_{r=0}^{n} \frac{k^r h^r}{r\,!} f^{(r)}(0) + \mathfrak{o}(h^n).$$

3.b. D'après la question 2 et en intervertissant les sommes à la ligne 3,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(kh) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\sum_{r=0}^{n} \frac{k^r h^r}{r\,!} f^{(r)}(0) + \mathfrak{o}(h^n) \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\sum_{r=0}^{n} \frac{k^r h^r}{r\,!} f^{(r)}(0) \right) + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \mathfrak{o}(h^n) \\
&= (-1)^n \sum_{r=0}^{n} \frac{h^r}{r\,!} f^{(r)}(0) \underbrace{\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^r}_{0 \text{ si } r \neq n \text{ par } (3)} + \mathfrak{o}(h^n) \\
&= (-1)^n \frac{h^n}{n\,!} f^{(n)}(0) (-1)^n n\,! + \mathfrak{o}(1) = h^n f^{(n)}(0) + \mathfrak{o}(h^n),
\end{aligned}$$