DM1 - corrigé - PSI* - 2025-2026

Exercice 1. Rappelons le théorème relatif aux sommes de Riemann. Si $f\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ est continue, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\,\frac{b-a}{n}\right)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La formule se comprend facilement en interprétant les deux sommes comme les sommes des aires des rectangles à gauche pour la première, à droite pour la deuxième. Il s'agit donc ici d'évaluer les sommes de Riemann correspondant à l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \cos t\,\mathrm{d}t$. En passant par l'exponentielle complexe, qui permet d'introduire une somme géométrique, et en considérant les rectangles à gauche, ici plus pratiques, il vient, si x y met un peu de bonne volonté (voir la discussion à l'issue du calcul),

$$S_n(x)=\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\exp\left(\frac{\mathrm{i}kx}{n}\right)=\frac{x}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/n}-1}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{x}{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-1}{\mathrm{i}x/n}=\mathrm{i}(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}).$$

En passant à la partie réelle, il vient $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathrm{Re}(S_n(x))=\sin x$. Le calcul ci-dessus est valable si $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x/n}\neq 1$, soit pour $x\not\equiv 0[2n\pi]$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_*$, c'est bien le cas à partir d'un certain rang. Pour $x=0$, l'égalité $\displaystyle\int_0^x\cos t\,\mathrm{d}t=\sin x$ est triviale.

Problème 1. Partie I

1. Le plus simple est de raisonner par récurrence sur n. Pour $n=1$, l'identité est $a_1b_1=a_1b_1$. En admettant la formule à l'ordre n, il vient

$$\sum_{k=1}^{n+1}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_nb_n+(A_{n+1}-A_n)b_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}A_k(b_k-b_{k+1})+A_{n+1}b_{n+1}.$$

Il est toutefois plus élégant, et pas vraiment plus compliqué, d'obtenir la formule directement, ce qui ne présuppose pas sa connaissance : en posant $A_0=0$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}(A_k-A_{k-1})b_k=-A_0b_1+\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_nb_n=\sum_{k=1}^{n-1}A_k(b_k-b_{k+1})+A_nb_n.$$

La transformation d'Abel est une version discrète de l'intégration par parties, fort utile. Naguère au programme, on la retrouve de temps en temps dans les problèmes en question intermédiaire.

2. On suppose qu'il existe M tel que, pour tout k, $|A_k|\leqslant M$ et que $(b_k)_k$ est décroissante et positive. Alors, la suite $(b_k-b_{k+1})_k$ est positive et l'on peut majorer

$$\sum_{k=1}^{n-1}\bigl|A_k(b_k-b_{k+1})\bigr|\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}M|b_k-b_{k+1}|=M\sum_{k=1}^{n-1}(b_k-b_{k+1})=M(b_1-b_n)\leqslant Mb_1.$$

Il s'ensuit que la série de terme général $A_k(b_k-b_{k+1})$ est absolument convergente, donc convergente. Comme, de plus, $A_nb_n=\mathcal{O}(b_n)$ et que $\lim b_n=0$ par hypothèse, on a donc $\lim A_nb_n=0$ et la série de terme général a_kb_k converge et l'on a, ce qui n'est pas demandé,

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k=\sum_{k=1}^{\infty}A_k(b_k-b_{k+1}).$$

3. Pour un complexe ζ de module 1 différent de 1, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\zeta^k=\zeta\frac{1-\zeta^n}{1-\zeta}\qquad\therefore\qquad\left|\sum_{k=1}^{n}\zeta^k\right|\leqslant\frac{2}{|1-\zeta|}.$$

Comme la suite $\displaystyle\left(\frac{1}{\ln k}\right)_{k\geqslant 2}$ est décroissante et de limite nulle, les hypothèses du théorème prouvé à la deuxième question sont vérifiées, d'où la convergence de la série. Si $\zeta=1$, on ne peut pas l'appliquer, et ce n'est pas étonnant, vu que la série de terme général $1/\ln k$ est divergente (on a $\dfrac{1}{\ln k} > \dfrac{1}{k}$ pour tout $k \geqslant 2$). Ainsi, pour $\zeta \neq 1$, la série $\sum \dfrac{\zeta^k}{\ln k}$ est convergente, mais pas absolument convergente. On dit parfois qu'elle est *semi-convergente* (ou on ne dit rien du tout car le terme n'est pas très heureux).

4. Avec les notations des questions 1. et 2., si l'on pose $a_k = (-1)^k$, alors $A_n \in \{-1, 0\}$ et la suite $(A_n)_n$ est donc bornée. Les autres hypothèses — $(b_k)_k$ décroissante de limite nulle — sont conjointement celles du critère spécial et de la question 2. Le critère se déduit donc de la question 2.

Partie II

5. Posons $\theta = n\pi$. Alors, la série $S_\alpha(n\pi)$ est la série nulle. Ce n'est pas passionnant, mais elle converge. On a

$$C_\alpha(2p\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad \& \quad C_\alpha((2p+1)\pi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}.$$

Il s'ensuit que $C_\alpha(2p\pi)$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$ (série de Riemann) et que $C_\alpha((2p+1)\pi)$ converge, si, et seulement si, $\alpha > 0$ (série de Riemann alternée, semi-convergente si $0 < \alpha \leqslant 1$.

6. Le terme général des deux séries se majore en valeur absolue par $k^{-\alpha}$ d'où la convergence absolue si $\alpha > 1$.

7. On suppose $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Le raisonnement fait à la question 3 s'applique à la série $\sum \dfrac{e^{ik\theta}}{k^\alpha}$ en substituant k^α à $\ln k$, ce qui donne la convergence de la série complexe par le théorème d'Abel, la suite $\left(\dfrac{1}{k^\alpha}\right)_k$ étant décroissante de limite nulle. On en déduit la convergence de $C_\alpha(\theta)$ et de $S_\alpha(\theta)$ pour $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, qui en sont respectivement les parties réelle et imaginaire. Il y a donc toujours convergence, sauf pour $C_\alpha(\theta)$ avec $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ (question 3).

8. Les deux questions précédentes montrent que S_α et C_α sont bien définies sur $\mathbb{R}$ pour tout $\alpha > 0$. Il est clair que S_α est impaire et que C_α est paire. Enfin, $e^{ik(\theta+T)} = e^{ik\theta} e^{ikT}$, donc $\theta \longmapsto e^{ik\theta}$ est $\dfrac{2\pi}{k}$ périodique. Il s'ensuit que C_α et S_α sont 2π-périodiques ce qui, associé à leur parité et au fait que l'on connaît les fonctions sur $\pi\mathbb{Z}$, justifie que l'on peut se contenter de les étudier sur $]0, \pi[$.

9. Ainsi qu'obligeamment suggéré par l'énoncé, on a, pour tout $(k, \theta) \in \mathbb{N}^* \times]0, \pi[$,

$$|\cos(k\theta)| \geqslant \cos^2(k\theta) = \frac{1 + \cos(2k\theta)}{2} \geqslant 0.$$

Pour $0 < \alpha \leqslant 1$, on en déduit la divergence de la série de terme général $\dfrac{|\cos(k\theta)|}{k^\alpha}$, minorée par la somme d'une série convergente — de terme général $\dfrac{\cos(2k\theta)}{2k^\alpha}$ — et d'une série divergente — de terme général $\dfrac{1}{2k^\alpha}$ —, donc positive divergente.

On raisonne de manière similaire pour $S_\alpha(\theta)$ en utilisant

$$|\sin(k\theta)| \geqslant \sin^2(k\theta) = \frac{1 - \cos(2k\theta)}{2}.$$

Conclusion : les séries $S_\alpha(\theta)$ et $C_\alpha(\theta)$ sont convergentes, non absolument convergentes, *i.e.* semi-convergentes.

10. On réalise une intégration par parties en dérivant la fonction. Avec $\lambda > 0$, il vient

$$\int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\,dt = \left[-\frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} f(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{\cos(\lambda t)}{\lambda} f'(t)\,dt \qquad \therefore$$

$$\left|\int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{|f(a)| + |f(b)|}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |f'(t)|\,dt \underset{\lambda\to\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} 0.$$

Remarque : avec des notations classiques sur les espaces vectoriels normés, la majoration s'écrit

$$\left|\int_a^b \sin(\lambda t) f(t)\,dt\right| \leqslant \frac{2\,\|f\|_\infty + \|f'\|_1}{\lambda}.$$

11. C'est peu ou prou la formule obtenue dans l'exercice, c'est pourquoi il est simplement demandé de la vérifier, ce qui est plus simple que de l'obtenir et peut se faire pour changer par récurrence (même si la méthode proposée dans le corrigé de l'exercice est meilleure) :

— pour $n = 1$, c'est la formule $2\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\cos\theta = \sin\left(\dfrac{3\theta}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$, cas particulier de la formule de linéarisation $2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

— On suppose maintenant la formule correcte à l'ordre $n-1$. Il vient

$$\sum_{k=1}^{n}\cos(k\theta) = \frac{\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} + \cos(n\theta) = \frac{\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right) + 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos(n\theta)}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$$
$$= \frac{\sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right) + \sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right) - \sin\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\frac{\theta}{2}} - \frac{1}{2}$$

en utilisant la même formule de linéarisation.

On écrit à présent $-\dfrac{\sin(k\theta)}{k} = \displaystyle\int_{\theta}^{\pi}\cos(kt)\,\mathrm{d}t$, d'où

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{k} = -\int_{\theta}^{\pi}\sum_{k=1}^{n}\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \int_{\theta}^{\pi}\left(\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

12. On reprend l'expression obtenue à la question précédente :

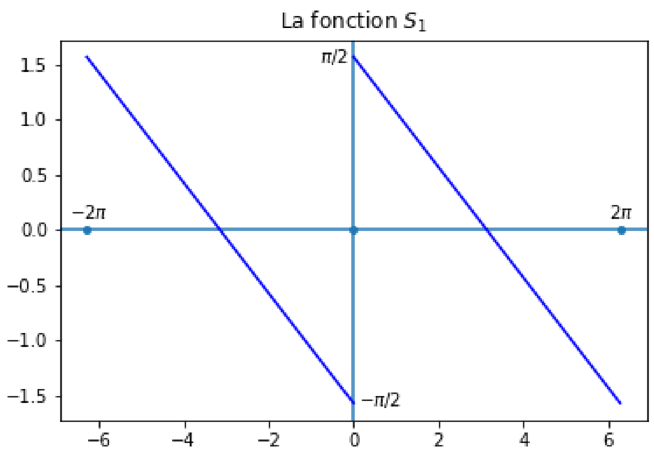
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{\pi-\theta}{2} - \int_{\theta}^{\pi}\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)\times\frac{\mathrm{d}t}{2\sin\frac{t}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi-\theta}{2}.$$

En effet, la fonction $\sin(t/2)$ ne s'annulant pas sur le segment $[\theta,\pi]$, la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{2\sin\frac{t}{2}}$ y est de classe $\mathscr{C}^1$ et le lemme de Riemann-Lebesgue s'applique.

On a ainsi $S_1(\theta) = \dfrac{\pi-\theta}{2}$ pour tout $\theta\in\,]0,\pi[$ et l'on constate que la formule vaut aussi en π (mais pas en 0). Comme S_1 est impaire et 2π-périodique, cela permet de trouver l'expression sur $[\pi,2\pi[$:

$$\forall\theta\in[\pi,2\pi[\;:\; S_1(\theta) = S_1(\underbrace{\theta-2\pi}_{\in[-\pi,0[}) = -S_1(\underbrace{2\pi-\theta}_{\in]0,\pi]}) = -\frac{\pi-(2\pi-\theta)}{2} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

La formule est donc vraie sur $]0,2\pi[$ et l'on conclut par imparité.




```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

plt.figure()
plt.axhline()
plt.axvline()
X, Y = np.array([0, 2 * np.pi]), np.array([np.pi / 2, -np.pi / 2])
plt.plot(X, Y, color = 'blue')
```

```
plt.plot(-X, -Y, color = 'blue')
plt.scatter([-2 * np.pi, 0, 2 * np.pi], [0, 0, 0], s = 15)
plt.annotate(text = '$-2\pi$', xy = (-6.7, 0.1))
plt.annotate(text = '$2\pi$', xy = (6, 0.1))
plt.annotate(text = '$\pi/2$', xy = (-0.82, 1.52))
plt.annotate(text = '$-\pi/2$', xy = (0.1, -1.6))
plt.title("La fonction $S_1$")
plt.savefig("S1-DM1_25-26.png")
plt.show()
```