# Intégrales généralisées - Résumé et compléments

## 1. Repères historiques

• $-$ III$^{\text{è}}$ siècle. Archimède calcule l'aire du disque en l'approchant par des polygônes réguliers inscrits et circonscrits.

• XVII$^{\text{è}}$ siècle, intégration sur un segment. Leibniz définit l'intégrale comme l'opération inverse de la dérivation.

• 1823, intégration sur un segment. Cauchy, dans son cours d'analyse à l'École Polytechnique, montre la convergence des sommes de Riemann (qui ne s'appellent pas encore comme ça...) associées à des fonctions continues.

Pour $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, et $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ une subdivision du segment $[a,b]$, on appelle *pas* de la subdivision le réel strictement positif $\delta(\sigma) = \min\limits_{0\leqslant k<n}(x_{k+1} - x_k)$. Alors, si $\mathfrak{S}$ est l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$,

$$\exists! I \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}\colon \delta(\sigma) \leqslant \alpha \Longrightarrow \left| \sum_{k=0}^{n-1} \big(x_{k+1} - x_k\big) f(x_k) - I \right| \leqslant \varepsilon.$$

Par définition, $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Il est possible de se restreindre aux *subdivisions régulières*, c'est-à-dire celles telles que $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ ; c'est la *méthode des rectangles*. Quand on réalise une intégration numérique, en revanche, la méthode des rectangles peut donner un résultat très mauvais (plus les variations de la fonction sont grandes, plus il convient de choisir un pas petit).

• 1854, intégration sur un segment de fonctions bornées. Riemann introduit dans sa thèse de doctorat des subdivisions pointées $(\sigma, \xi)$, où $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ est une subdivision du segment $[a,b]$ et $\xi = (\xi_i)_{0\leqslant i<n}$ une suite finie telle que $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. On note $\mathfrak{R}$ l'ensemble des subdivisions pointées du segment $[a,b]$. Riemann définit alors l'ensemble des fonctions intégrables comme l'ensemble des fonctions $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\exists I \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0,\ \forall (\sigma, \xi) \in \mathfrak{R}\colon \delta(\sigma) \leqslant \alpha \Longrightarrow \left| \sum_{k=0}^{n-1} \big(x_{k+1} - x_k\big) f(\xi_k) - I \right| \leqslant \varepsilon.$$

Le réel $I$ est alors unique. Darboux montre que les fonctions ci-dessus, dites *intégrables au sens de Riemann* sont exactement les fonctions $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que

$$\sup_{\substack{h\in\mathcal{E} \\ h\leqslant f}} \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \inf_{\substack{h\in\mathcal{E} \\ f\leqslant h}} \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t,$$

$\mathcal{E}$ désignant l'ensemble des fonctions en escalier définies sur $[a,b]$. La valeur de l'intégrale est alors définie comme les deux quantités égales ci-dessus.

• 1904, intégration sur $\mathbb{R}$. Lebesgue, dans ses *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* renverse le point de vue. Soit $f\colon [a,b] \to [c,d]$. À l'aide d'une subdivision $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$, il approche ce qui sera l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ par

$$\sum_{k=0}^{n-1} y_i \mu\big(f^{-1}([y_i, y_{i+1}])\big),$$

où $\mu(A)$ est la mesure de $A$ (typiquement, la mesure d'une réunion disjointe d'intervalles bornés est la somme des longueurs de ces intervalles, mais on peut mesurer des ensembles considérablement plus compliqués). On parle de *fonction étagée*, qui remplacent dans cette théorie les fonctions en escalier. L'intégrale est alors la borne supérieure des quantités ci-dessus relativement aux fonctions étagées inférieures à $f$.

En fait, Lebesgue place directement la théorie dans le cadre plus large des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sa théorie a l'inconvénient de ne pouvoir considérer que des intégrales absolument convergentes (et d'être délicate à mettre en place...) Sinon, elle n'a que des avantages. Il est impossible de construire explicitement des fonctions bornées sur un intervalle borné dont l'intégrale ne soit pas définie (mais il en existe en acceptant l'axiome du choix). La théorie de Lebesgue, dûment étendue, est **la** théorie utilisée universellement en mathématiques et en physique théorique depuis un siècle. La *théorie de la mesure* sur laquelle elle se fonde est le cadre universel du calcul des probabilités depuis les années 1930.

• Vers 1950, intégration sur $\mathbb{R}$. Indépendamment, Kurzweil et Henstock raffinent la théorie de Riemann pour donner, sans théorie de la mesure, une intégrale aussi puissante que celle de Lebesgue se débarrassant du problème de la convergence absolue.

## 2. Intégrales généralisées sur $[a, +\infty[$

### 2.1. **Définition.**

**Définition 1.** *Si $a \in \mathbb{R}$ et $f \colon [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est continue par morceaux, l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est* convergente *si* $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ *admet une limite finie quand $x$ tend vers l'infini. Autrement formulé (dans le cas où $f$ est continue), l'intégrale converge si, et seulement si, les* primitives *de $f$ admettent une limite finie en $+\infty$ (l'existence de cette limite, contrairement à sa valeur, ne dépend pas de la primitive choisie).*

La convergence est fonction du comportement de $f$ au voisinage de l'infini. Aussi la nature de $\displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est-elle indépendante de $x$ pour tout $x \geqslant a$. Par abus de langage (dûment autorisé par le programme officiel), on dit que *l'intégrale est convergente en l'infini.*

### 2.2. **Convergence absolue et intégrabilité.**

**Définition 2.** *Si $f \colon [a, +\infty[\to \mathbb{K}$ est continue par morceaux, l'intégrale* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est dite* absolument convergente *si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ *est convergente. On dit de manière équivalente que $f$ est* intégrable *sur $[a, +\infty[$.*

**Proposition 1.** *Une intégrale absolument convergente est convergente.*

Le principe de la démonstration est de décomposer selon les parties positive et négative, soit $f = f_+ - f_-$ avec $f_+ = \max(f, 0)$ et $f_- = -\min(f, 0)$, d'où $|f| = f_+ + f_-$ (un dessin permet de bien comprendre cette décomposition).

Une intégrale convergente sans être absolument convergente est parfois dite *semi-convergente*. L'exemple le plus connu d'une telle intégrale est $\displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{sinc}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ (sinus cardinal). Pour les fonctions de signe constant au voisinage de l'infini, la convergence et la convergence absolue sont équivalentes.

L'intégrale d'une fonction à valeurs complexes est convergente si, et seulement si, celles de ses parties réelles et imaginaires sont toutes deux convergentes. De même, une fonction à valeurs complexes est intégrable si, et seulement si, ses parties réelles et imaginaires le sont.

**Rappel.** Si $I$ est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, toute fonction $f \colon I \to \mathbb{R}$ strictement monotone admet des limites finies aux bornes de $I$. La limite de $f$ en $\sup I$ est finie si, et seulement si, $f$ est majorée. Celle en $\inf I$ l'est si, et seulement si, $f$ est minorée.

**Théorème 1** (Théorème de comparaison)**.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies et continues par morceaux sur $I = [a, +\infty[$.*

*0)* Cas des fonctions positives. *Si $0 \leqslant f \leqslant g$ au voisinage de $+\infty$ et si* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ *converge, alors* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge aussi.*

*1) Si $g$ est intégrable sur $I$ et si $|f| \leqslant |g|$ sur un voisinage de $+\infty$ (i.e. sur un intervalle de la forme $[b, +\infty[$ avec $b \geqslant a$, alors $f$ est intégrable sur $I$.*

*2) Si $g$ est intégrable sur $I$ et si $f = \mathcal{O}(g)$ au voisinage de $+\infty$, alors $f$ est intégrable sur $I$.*

*3) Si $g$ est intégrable sur $I$ et si $f = \mathfrak{o}(g)$ au voisinage de $+\infty$, alors $f$ est intégrable sur $I$.*

*4) S'il existe une constante non nulle $C$ telle que $f \sim Cg$ au voisinage de $+\infty$, alors $f$ est intégrable, si, et seulement si, $g$ l'est.*

Dans le dernier item, on peut remplacer l'hypothèse $f \sim Cg$ par l'hypothèse moins restrictive $f = \Theta(g)$ (*i.e.* $f = \mathcal{O}(g)$ et $g = \mathcal{O}(f)$). La démonstration des items 2 à 4 s'appuie fondamentalement le cas positif.

Le théorème de comparaison s'utilise aussi quelquefois sous forme contraposée : par exemple, si $0 \leqslant f \leqslant g$ au voisinage de $+\infty$ et si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi. Si $f = \mathfrak{o}(g)$ au voisinage de $+\infty$ et si $f$ n'est pas intégrable, alors $g$ ne l'est pas non plus.

**Il est essentiel de retenir que, comme dans le cadre des séries, le théorème de comparaison ne permet d'obtenir QUE des convergences absolues.**

## 3. Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

3.1. **Extension immédiate.** Les définitions et les résultats de la section 2 s'étendent *mutatis mutandis* aux intervalles semi-ouverts, *i.e.* du type $[a, b[$ avec $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ ou $]a, b]$ avec $-\infty \leqslant a < b < +\infty$. Il y a un petit paradoxe dans le cas $]a, b]$ : si $f\colon ]a, b] \to \mathbb{R}_+$, la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ doit, pour avoir une limite finie en $a$, être décroissante majorée...

Pour les intervalles ouverts, on se ramène à deux intervalles semi-ouverts et donc à **deux** convergence**s** (ou à deux intégrabilité**s**) **indépendantes** :

**Définition 3.** *Si $f\colon ]a, b[ \to \mathbb{K}$ est continue par morceaux, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$* ***et*** *$\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge**nt**, où $a < c < b$. Cela ne dépend pas du choix de $c$.*

On peut dédoubler le découpage : si $(c, d) \in ]a, b[^2$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ **et** $\displaystyle\int_d^b f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. On parle d'*intégrale convergente en $a$* pour dire que $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et d'*intégrale convergente en $b$* pour dire que $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

3.2. **Intégration sur un intervalle.** On note indifféremment $\displaystyle\int_I f$, $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Si $f \in \mathcal{C}^0_{\text{p.m.}}\big([a, b[\big)$ et $a < c < b$, $\displaystyle\int_a^b f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ sont de même nature et la relation de Chasles s'applique. Ni la nature, ni la valeur d'une intégrale ne sont affectées par la modification d'une fonction en un nombre fini de points. Dans le même ordre d'idées, on a $\displaystyle\int_I f = \int_{\mathring{I}} f = \int_{\overline{I}} f$, où $\mathring{I}$ désigne l'intérieur de $I$, c'est-à-dire l'intervalle ouvert $]\inf(I), \sup(I)[$ et $\overline{I}$ son adhérence, c'est-à-dire, si les bornes sont finies, le segment $[\inf(I), \sup(I)]$.

**Proposition 2.** ***1.*** *Si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, $\displaystyle\int_I f$ est convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_I \mathrm{Re}(f)$ et $\displaystyle\int_I \mathrm{Im}(f)$ le sont. De plus, $f$ est intégrable sur $I$ si, et seulement si, $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.*
***2.*** *Une fonction continue par morceaux et bornée sur un intervalle borné est intégrable sur cet intervalle.*

**Exemple 1.** $\displaystyle\int_{[0,1]} \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

3.3. **Linéarité.** Si $\displaystyle\int_I f$ **et** $\displaystyle\int_I g$ convergent, alors, pour des scalaires $\lambda$ et $\mu$, l'intégrale $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g)$ converge et l'on a l'égalité numérique $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$.

**Attention aux découpages imprudents** : l'intégrale $\displaystyle\int_I(\lambda f+\mu g)$ peut converger et les intégrales $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ diverger. En revanche, ces deux intégrales sont nécessairement de même nature.

**Exemple 2.** L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t-\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, mais n'est pas égale à $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ car ces deux intégrales divergent.

3.4. **Intégrales faussement généralisées.** Si $f$ est une fonction continue définie sur un intervalle **borné** $I$ de la forme $]a,b]$ ou $[b,a[$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_I f$ est *faussement généralisée* si $f$ admet une limite **finie** en $a$. Il y a alors trivialement convergence de l'intégrale, $f$ coïncidant avec son prolongement par continuité en $a$ sur tout segment inclus dans l'intervalle semi-ouvert.

**Exemple 3.** $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{1-\cos t}{t^{3/2}}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1\sqrt{t}\ln t\,\mathrm{d}t$ sont faussement généralisées en 0.

Si $f$ est seulement continue par morceaux et admet un limite finie en $a$, la fonction prolongée peut ne plus être continue par morceaux sur $[a,b]$, mais l'intégrale converge aussi d'après la proposition 2, *item* 2.

**Exemple 4.** $\displaystyle\int_0^1 x^2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\mathrm{d}x$. On applique la proposition 2 à partir de la majoration $0\leqslant x^2\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\leqslant x^2\times\frac{1}{x}=x\leqslant 1$.

**Il n'y a pas d'intégrale faussement généralisée en l'infini.**

3.5. **Intégrales de référence.** Elles se ramènent à deux types (*cf.* le théorème 2).

— Sur $]0,a]$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1\ln t\,\mathrm{d}t$ converge (et vaut $-1$) ; l'intégrale $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha<1$.

— Sur $[a,+\infty[$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\alpha>0$ (ssi $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ pour $\alpha\in\mathbb{C}$) et vaut $\dfrac{1}{\alpha}$ ; l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha>1$.

**Remarque 1.** $\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge quel que soit $\alpha$.

3.6. **Espaces fonctionnels.**

3.6.1. *Fonctions intégrables.*

**Proposition 3.** *L'ensemble* $\mathcal{L}^1(I,\mathbb{K})=\left\{f\in\mathcal{C}^0_{\text{p.m.}}(I,\mathbb{K})\,;\ f\ \textit{intégrable}\right\}$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^0_{\text{p.m.}}(I,\mathbb{K})$ *et*

$$\forall f\in\mathscr{L}^1(I)\colon\ \left|\int_I f\right|\leqslant\int_I|f|.$$

3.6.2. *Fonctions de carré intégrable.*

**Définition 4.** *La fonction* $f\colon I\to\mathbb{K}$*, continue par morceaux, est dite de carré intégrable si* $f^2$ *est intégrable sur* $I$*, donc si* $\displaystyle\int_I f^2$ *est convergente. On note* $\mathscr{L}^2(I,\mathbb{K})=\left\{f\in\mathcal{C}^0_{\text{p.m.}}(I,\mathbb{K})\,;\ f\ \textit{intégrable}\right\}$

On peut commencer par établir l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

**Proposition 4.** *Si* $f$ *et* $g$ *sont de carré intégrable, alors* $fg$ *est intégrable et* $\displaystyle\left|\int_I fg\right|\leqslant\left(\int_I|fg|\right)^2\leqslant\int_I|f|^2\times\int_I|g|^2$.

L'inégalité se montre tout d'abord sur $[a,b]\subset I$ en développant l'inégalité $\displaystyle\int_a^b\big(|f(t)|+x|g(t)|\big)^2\,\mathrm{d}t\geqslant 0$, qui montre qu'un certain polynôme de $\mathbb{R}_2[x]$ ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$, donc est de discriminant négatif. On passe d'un segment à un intervalle quelconque par passage à la limite aux bornes de l'intervalle d'intégration dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Si $f$ et $g$ sont continues, il y a égalité si, et seulement si, $|f|$ et $|g|$ sont proportionnelles. Pour des fonctions continues par morceaux, cette proportionnalité peut faire défaut aux points de discontinuité de l'une des deux fonctions.

**Corollaire 1.** *$\mathscr{L}^2(I)$ est un espace vectoriel.*

## 4. Transformation d'intégrales

Il y a deux grandes techniques de transformation.

4.1. **Intégration par parties.** Si $f$ et $g$ sont définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a,b[$, alors on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \big[f(t)g(t)\big]_{t\to a}^{t\to b} - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

— On ne considère de limites au crochet que si la borne considérée n'est pas dans le domaine $\mathscr{C}^1$ de $f$ ou de $g$.

— Si le crochet admet une (double) limite finie, alors les deux intégrales sont de même nature.

— Si le crochet de (1) n'admet pas de limite finie, on peut essayer de jouer sur la constante d'intégration de $f$ pour le faire converger (*cf.* exemple 5), mais ce n'est pas toujours possible. Si la deuxième intégrale se calcule, on peut intégrer sur un segment et passer à la limite relativement à la borne d'intégration.
— Si le crochet admet une limite finie et que les intégrales convergent, l'égalité (1) est une égalité numérique.

— L'intégration par parties ne conserve pas en général l'intégrabilité : même si le crochet admet une limite finie, il se peut que l'une des intégrales soit absolument convergente et l'autre, seulement semi-convergente.

**Exemple 5.** Bien que les intégrales soient faussement généralisées en 0, on réalise l'i.p.p. sur $]0,+\infty[$ car les fonctions ne sont de classe $\mathcal{C}^1$ que sur cet intervalle.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \underbrace{(\sin t)}_{u'} \times \underbrace{\frac{1}{t}}_{v}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_{t\to 0}^{t\to+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4.2. **Changement de variable.**

**Théorème 2.** *1) Si $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $f$ est continue sur le segment $[\varphi(a),\varphi(b)]$, alors, sous réserve de compatibilité avec le domaine de définition des fonctions en présence, on a*

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

*2) Si $f$ est continue par morceaux et si $\varphi$ réalise une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ d'un intervalle $I$ sur un intervalle $J$, alors*

$$\int_J f(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(\varphi(t))|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

— La formule (2) nécessite un segment $[a,b]$ et une fonction $f$ continue. La formule (3) exige en plus que $\varphi$ soit strictement monotone, mais s'étend aux intervalles quelconques et aux fonctions continues par morceaux. La présence de la valeur absolue autour de $\varphi'(t)$ est due à la notation $\displaystyle\int_I$ : si l'on utilise la notation $\displaystyle\int_a^b$ et que $\varphi$ est décroissante, le changement de variable donne une intégrale dont les bornes sont « dans le mauvais sens » et une dérivée $\varphi'$ négative, mais l'on récupère un signe positif en rétablissant l'ordre habituel des bornes.

— La formule (3) conserve à la fois la convergence de l'intégrale (un changement de variable bijectif ne modifie pas la nature de l'intégrale) et la convergence absolue (donc l'intégrabilité).

— Des changements de variable affine très simples permettent d'étendre le système d'intégrales de référence à n'importe quel intervalle. Ainsi, pour $a$ et $b$ finis, $u=-t$ transforme $]-\infty,-a]$ en $[a,+\infty[$, $u=t-a$ transforme $]a,b]$ en $]0,b-a]$ et $u=b-t$ transforme $[a,b[$ en $]0,b-a]$.

— Application à l'intégration des fonctions à parité. Si $a \in ]0,+\infty]$ et $f\colon\, ]-a,a[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. En cas de convergence, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si $f$ est impaire et $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$ si $f$ est paire. Par exemple, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ n'est pas nulle ; elle diverge...

## 5. Marche à suivre et pièges divers

1) La première chose à faire, pour déterminer la nature de l'intégrale d'une fonction est de déterminer son domaine de continuité par morceaux (qui est presque toujours un domaine de continuité) : domaine de définition de la fonction intégrée, dénominateur ne s'annulant pas... et, surtout, quelles sont les bornes qui « posent problème ». Une borne infinie nécessite **toujours** une étude particulière.

**Exemple 6.** — Soit à déterminer la nature de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x\sqrt{x}}$. La fonction $f$ est continue (p.m.) sur $[0,+\infty[$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^{3/2}}$, d'où la convergence de l'intégrale car $3/2>1$. <u>Pas d'étude en 0.</u>

— Soit à déterminer la nature de $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ en fonction de $a\in\mathbb{R}$. La fonction $f_a(t) = \dfrac{t^a}{1+t^4}$ est continue (p.m.) sur $[0,+\infty[$ si $a \geqslant 0$ et seulement sur $]0,+\infty[$ si $a<0$, mais il serait ici maladroit de distinguer ces deux cas car on a toujours $f_a(t) \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\sim} t^a$, d'où la convergence de $\displaystyle\int_{0}^{1} f_a(t)\,\mathrm{d}t$ si, et seulement si, $a>-1$. Par ailleurs, $f_a(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{a-4}$, d'où la convergence de $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} f_a(t)\,\mathrm{d}t$ si, et seulement si, $a<3$. Finalement, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ converge pour $a\in ]-1,3[$.

2) Le plus naturel, ensuite (sauf si l'on sait que ça ne va pas marcher), est de prouver la convergence absolue (ou la divergence en cas de fonction de signe constant au voisinage de la borne considérée) en utilisant le théorème de comparaison. Ne pas oublier que les implications du théorème de comparaison peuvent être contraposées pour prouver une divergence.

**Exemple 7.** Déterminer la nature de $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$. Si $\alpha \geqslant 1$, l'intégrale diverge par contraposée car $\dfrac{1}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{=} \mathfrak{o}\left(\dfrac{\ln t}{t^\alpha}\right)$ et $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge. Si $\alpha<1$, on écrit

$$\frac{\ln t}{t^\alpha} = \left(t^{(1-\alpha)/2}\ln t\right) \times \frac{1}{t^{(1+\alpha)/2}} = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{t^{(1+\alpha)/2}}\right)$$

car $(1-\alpha)/2>0$, d'où $\displaystyle\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} t^{(1-\alpha)/2}\ln t = 0$. Comme $(1+\alpha)/2<1$, l'intégrale $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{(1+\alpha)/2}}$ converge, donc $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln t}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

3) Si l'intervalle d'intégration n'est pas de la forme $]0,b]$, ni $[a,+\infty[$, on s'y ramène le plus souvent par un changement de variable affine de la forme $u=t-a$ ou $u=b-t$, mais la forme de la fonction peut appeler d'autres changements de variable comme $u=1/t$.

**Exemple 8.** Le changement de variable $u=1-t$ permet d'écrire

$$\int_{0}^{1} \frac{\cos t}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{0} \frac{\cos(1-u)}{\sqrt{u}}(-\,\mathrm{d}u) = \int_{0}^{1} \frac{\cos(1-u)}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u,$$

d'où la convergence de la première intégrale.

Si l'on a bien compris, on peut se servir des intégrales $\displaystyle\int_{a}^{a+1} \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$, $\displaystyle\int_{b-1}^{b} \frac{\mathrm{d}t}{(b-t)^\alpha}$ comme intégrales de référence.

4) Quand le théorème de comparaison n'est pas applicable, on peut se lancer dans une intégration par parties ou un changement de variable. Si l'intégrale est semi-convergente, on ne pourra pas y échapper. Il arrive qu'un changement de variable rende plus facile l'application du théorème de comparaison. Si l'on s'en rend compte, on peut alors sauter l'étape précédente.

**Exemple 9.** Soit à déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{1/t}\,\mathrm{d}t$. On a $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{1/t}\,\mathrm{d}t \underset{(u=1/t)}{=} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^u}{u^2}\,\mathrm{d}u$. Or, $\displaystyle\mathrm{e}^{u/2} \underset{u\to+\infty}{=} \mathfrak{o}\left(\frac{\mathrm{e}^u}{u^2}\right)$, d'où la divergence de l'intégrale par contraposée du théorème de comparaison.

Il est aussi possible de revenir à la définition (existence d'une limite finie des primitives). C'est ce que l'on fait quand on veut, outre montrer sa convergence, calculer explicitement l'intégrale, et, souvent, sur les exercices théoriques où la fonction intégrée vérifie certaines hypothèses, mais n'est pas explicitement donnée.

**Remarque 2.** Pour $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}$, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ n'a (presque) rien à voir avec la limite de $f$ en l'infini. C'est une différence avec les séries, où $\lim u_n = 0$ est une condition nécessaire (mais non suffisante) de convergence de la série. Plus précisément :

— les fonctions $1/t^\alpha$ montrent que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ peut diverger ou converger quand $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ ;

— l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ converge, bien que $t \longmapsto \sin(t^2)$ n'ait pas de limite quand $t$ tend vers $+\infty$ ;

— si $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell \in \overline{\mathbb{R}} \cup \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge ;

— si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge et si $f$ est lipschitzienne, alors $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.

Supposons par l'absurde que $\neg\big(\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0\big)$. Sans perte de généralité dans le cas réel (quitte à travailler avec $-f$), il existe une constante $a > 0$ et des réels $x$ arbitrairement grands tels que $f(x) \geqslant a$. L'inégalité ci-dessus donne

$$\int_x^{x+f(x)/k} f(u)\,\mathrm{d}u \overset{(u=x+t)}{=} \int_0^{f(x)/k} f(x+t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{(AF)}}{\geqslant} \frac{f(x)^2}{2k} \geqslant \frac{a^2}{2k},$$

ce qui montre que les primitives de $f$ n'ont pas de limite finie en $+\infty$, donc que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge. Cette dernière propriété n'est pas un item du programme.