# DMS 1 - PSI* — 2025 - 2026

**Exercice. 0.** Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et représenter graphiquement l'ensemble $D$ des points $M(a,b)$ pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^a}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$ converge.

## Problème I

On rappelle la formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ et $K_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

**1.** Justifier l'existence de $I_n$ et montrer que $I_n \geqslant 2^{-n}$.

**2.** Justifier l'existence de $K_n$ et calculer $K_1$.

**3.** Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\,2^n}\right)$. *On pourra minorer* $1+t^2$ *par un polynôme du premier degré.*

**4.** En déduire que $I_n \sim K_n$.

**5.** Montrer que $K_{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right) K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

**6.** En déduire une expression non intégrale de $K_{n+1}$ utilisant un coefficient binomial.

**7.** En utilisant la formule de Stirling, donner un équivalent de $\dbinom{2n}{n}$ quand $n$ tend vers l'infini. En déduire un équivalent de $I_n$.

**8.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{n} I_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}u$.

**9.** Pour $u \in \mathbb{R}_+$, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+u^2/n)^n$.

**10.** Montrer que, si $x \in [0,1]$, alors $2\ln(1+x) \geqslant x$. En déduire que

$$\forall u \in \left[0, \sqrt{n}\right] : \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} \leqslant \mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

**11. (3/2).** Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ converge. On admet que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

**11. (5/2).** Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

**12.** En déduire les valeurs de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ et de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}t$.

**13.** Déterminer un équivalent quand $x$ tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$.

# Problème II

Ce problème traite du développement en série entière de l'exponentielle et estime certains restes liés à cette série. On y développe aussi en passant une démonstration de la formule de Stirling. Dans un souci de cohérence logique, l'utilisation de cette formule est donc proscrite jusqu'à ce qu'elle soit démontrée (question 26).

*Partie 1 — Exponentielle tronquée*

Pour $x$ réel strictement positif et $n$ entier naturel, on pose

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k x^k}{k!} \text{ et } R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n^k x^k}{k!}.$$

**14.** Justifier l'existence de $R_n(x)$. Rappeler la valeur de la somme $T_n(x) + R_n(x)$ ?

**15.** En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à une fonction bien choisie, puis en effectuant sur l'intégrale un changement de variable, prouver que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{N} \colon R_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{nx}\, n^{n+1}}{n!} \int_0^x (t\mathrm{e}^{-t})^n \,\mathrm{d}t.$$

Soit $y$ un réel strictement positif. On pose $a_n = \dfrac{n^{n+1}}{n!} y^n$.

**16.** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. En déduire que, si $y < \mathrm{e}^{-1}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

**17.** Dans cette question, on fixe $x \in ]0,1[$. Après l'avoir étudiée sur $\mathbb{R}_+$, montrer que la fonction $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$ admet, sur $[0, x]$, un maximum $M$, et que $M < \mathrm{e}^{-1}$. En déduire que $R_n(x) = \mathfrak{o}(\mathrm{e}^{nx})$ quand $n$ tend vers l'infini, puis que $T_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{nx}$.

**18.** Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^n \mathrm{d}t$ et montrer qu'elle vaut $n!\, n^{-n-1}$. En utilisant la question 15, en déduire que

$$T_n(x) = \mathrm{e}^{nx} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_x^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^n \mathrm{d}t.$$

**19.** En déduire alors que, si $x > 1$, alors $T_n(x) = \mathfrak{o}(\mathrm{e}^{nx})$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

*Indication :* On pourra utiliser, en la justifiant, l'inégalité $(t\mathrm{e}^{-t})^n \leqslant (x\mathrm{e}^{-x})^{n-1} t\,\mathrm{e}^{-t}$ pour tout $t \geqslant x > 1$.

*Partie 2 — Méthode de Laplace*

Dans la suite, on admet la formule donnant l'intégrale de Gauß : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$.

Soit $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur laquelle on fait les hypothèses suivantes :

**H1** : $f(0) = 1$ ;

**H2** : $f''(0) = -1$ ;

**H3** : $\forall x \in ]-1,1[\setminus\{0\} \colon 0 < f(x) < 1$ ;

**H4** : les nombres $f(-1)$ et $f(1)$ appartiennent à l'intervalle $[0,1[$.

Pour $x \in ]-1,1[\setminus\{0\}$, on pose $\varphi(x) = -\dfrac{1}{x^2}\ln\big(f(x)\big)$.

**20.** Montrer que $f'(0) = 0$ puis déterminer $k = \lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$. On prolonge dorénavant $\varphi$ en posant $\varphi(0) = k$.

**21.** Montrer que la fonction $\varphi$ est minorée sur $]-1,1[$ par un réel strictement positif. En déduire l'existence d'un réel $a > 0$ tel que, pour tout $x \in [-1,1]$, on ait $f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-ax^2}$.

Pour tout $n$ entier naturel non nul, on définit une fonction $g_n\colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \begin{cases} \left(f\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n & \text{si } x \in \big[-\sqrt{n}, \sqrt{n}\big], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**22.** On admet dans cette question le théorème suivant :

**Théorème de convergence dominée.** *Soit $I$ un intervalle non trivial. Soient $f_n\colon I \to \mathbb{R}$ des fonctions continues par morceaux. On suppose que :*

*i) Pour tout $x \in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)_n$ est convergente et $f\colon x \mapsto \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ est continue par morceaux ;*

*ii) il existe une fonction $h\colon I \to \mathbb{R}_+$, intégrable sur $I$, telle que, pour tout $(n,x) \in \mathbb{N}\times I$, $|f_n(x)| \leqslant h(x)$.*

*Alors,* $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_I f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_I f(x)\,\mathrm{d}x.$

**a.** Montrer que chaque fonction $g_n$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

**b.** Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

**c.** En appliquant le théorème de convergence dominée, déterminer $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

**d.** En déduire que

$$\int_{-1}^{1}\big(f(x)\big)^n\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

On en déduit de la même manière (on ne demande pas de le faire) que

$$\int_{0}^{1}\big(f(x)\big)^n\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

### *Partie 3 — Formules de Stirling et de Bernstein*

**23.** Pour tout entier $n \geqslant 1$, déduire de la question 18 que $n! = n^{n+1}\mathrm{e}^{-n}(I_n + J_n)$, avec

$$I_n = \int_{-1}^{1} (x+1)^n \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_{1}^{+\infty} (x+1)^n \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

**24.** Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $x+1 \leqslant 2^x$. En déduire une majoration non intégrale de $J_n$.

**25.** En appliquant la méthode de Laplace, donner un équivalent de $I_n$.

**26.** En déduire une démonstration de la formule de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

On reprend les notations $T_n(x)$ et $R_n(x)$ introduites dans la partie 1.

**27.** Pour tout entier $n$ non nul, montrer l'identité

$$R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \mathrm{e}^{nt}\,\mathrm{d}t.$$

**28.** En déduire un équivalent de $R_n(1)$ lorsque $n$ tend vers l'infini. Prouver que

$$T_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^n}{2}.$$

### *Partie 4 — Première répétition (partie bonus)*

*Cette partie est réservée à ceux ayant fait le reste.*

Une urne contient $n$ boules numérotées de 1 à $n$. On y effectue $n+1$ tirages avec remise. On note $X$ le nombre de tirages nécessaires pour retirer une boule quelle qu'elle soit. On note $U_j$ le numéro de la $j^{\text{ème}}$ boule tirée. On suppose que les v.a. $U_j$ sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Par exemple, avec $n = 5$, si les tirages donnent $3 - 2 - 1 - 5 - 2 - 3$, alors $U_1 = 3$, $U_2 = U_5 = 2$, $U_3 = 1$ et $X = 5$.

**29.** Montrer que, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, l'événement $(X = k)$ est de probabilité non nulle.

**30.** Montrer que $\mathbf{P}(X > k+1) = \mathbf{P}(X > k+1 \mid X > k)\,\mathbf{P}(X > k)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

**31.** En déduire une expression simple de $\mathbf{P}(X > k)$.

**32.** Justifier que $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k)$.

**33.** Déduire des questions précédentes un équivalent simple de $\mathbf{E}(X)$ quand $n$ tend vers l'infini.