DMS 1 — PSI* 2025 - 2026 – Corrigé

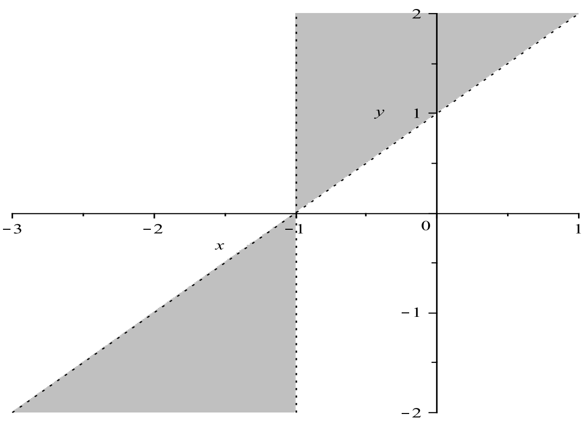
Exercice I (oral ENSEA)

On utilise la comparaison avec la fonction de référence $t^{-\alpha}$. Selon les cas, l'intégrale est doublement généralisée en 0 et en l'infini, ou bien ne l'est qu'en l'infini, mais la comparaison avec $t^{-\alpha}$ en 0 vaut également si $\alpha < 0$, donc si la fonction est continue en 0. On pose $f(t) = \dfrac{t^a}{1+t^b}$.

— Si $b > 0$, on a $f(t) \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\sim} t^a$ et $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{a-b}$. L'intégrale converge donc si, et seulement si, $a > -1$ et $a - b < -1$.

— Si $b = 0$, $I(a,b)$ diverge quel que soit a.

— Si $b < 0$, on a $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^a$ et $f(t) \underset{\substack{t\to 0\\ t>0}}{\sim} t^{a-b}$. Il y a donc convergence si, et seulement si, $a < -1$ et $b - a < 1$.



Le domaine de convergence D (représenté grisé) est donc délimité par les droites d'équation $a = -1$ et $b - a = 1$. Il est ouvert (les droites ne sont pas comprises dans D).

Problème 1 — D'après Centrale-Supélec MP1, partie 1, 2023

1. I_n est l'intégrale sur le segment $[0,1]$ d'une fonction continue sur ce segment, d'où son existence. Sur $[0,1]$, la fonction $u(t) = (1+t^2)^{-n}$ est décroissante, d'où $u(t) \geqslant u(1) = 2^{-n}$. Par croissance de l'intégrale, $I_n \geqslant \displaystyle\int_0^1 2^{-n}\,\mathrm{d}t = 2^{-n}$.

2. La fonction u est continue sur $[1,+\infty[$ et $u(t) \leqslant \dfrac{1}{t^2}$ — ou $\mathcal{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ ou équivalente en l'infini à $\dfrac{1}{t^2}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est convergente, K_n est bien définie. Enfin,

$$K_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^{t\to+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

3. Par croissance de l'intégrale, pour tout $n \geqslant 2$ (pour que l'intégrale minorante soit convergente) :

$$\forall t \geqslant 1 : t^2 \geqslant t \Longrightarrow \frac{1}{(1+t^2)^n} \geqslant \frac{1}{(1+t)^n} \qquad \therefore$$

$$0 \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} \leqslant \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n} = \left[-\frac{1}{(n-1)(1+t)^{n-1}}\right]_1^{t\to+\infty} = \frac{1}{(n-1)2^{n-1}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\,2^n}\right).$$

4. De $I_n \geqslant \dfrac{1}{2^n}$, de la relation de Chasles et de la question précédente, on tire

$$K_n = I_n + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = I_n + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n\,2^n}\right) = I_n + \mathfrak{o}(I_n)$$

d'où $K_n \sim I_n$.

5. On réalise une intégration par parties. Le crochet converge, ce qui valide l'i.p.p.

$$K_n = \int_0^{+\infty} \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\frac{1}{(1+t^2)^n}}_{v} \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} t \times \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

$$= 0 + 2n\int_0^{+\infty} \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = 2n(K_n - K_{n+1}) \qquad \therefore \qquad K_{n+1} = \frac{(2n-1)K_n}{2n} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) K_n.$$

6. À partir de $K_2 = \dfrac{K_1}{2}$, puis en multipliant en haut et en bas par $2n(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2 = 2^n\,n!$, la relation précédente donne

$$K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}K_n = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)}K_{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 3\times 1}{2n(2n-2)\times\cdots\times 4\times 2}K_1$$
$$= \frac{(2n)!}{(2^n\,n!)^2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n+1}\,n!^2} = \binom{2n}{n}\frac{\pi}{2^{2n+1}}.$$

7. En utilisant l'expression factorielle du coefficient binomial, puis la formule de Stirling, il vient $I_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{2n}\times\frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \qquad \therefore$$
$$I_{n+1} \overset{(\mathrm{Q}.4)}{\sim} K_{n+1} = \binom{2n}{n}\frac{\pi}{2^{2n+1}} \sim \frac{2^{2n}\pi}{\sqrt{\pi n}\times 2^{2n+1}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}},$$

d'où $I_n \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n-1}} \sim \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$.

8. On effectue le changement de variable $u = \sqrt{n}t$ dans l'intégrale I_n (changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ strictement monotone). Il vient

$$\sqrt{n}I_n = \int_0^1 \frac{\sqrt{n}\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n} = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n}\mathrm{d}u.$$

9. Par continuité de l'exponentielle, on a

$$\ln\left[\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n\right] = n\ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} n\times\frac{u^2}{n} = u^2 \qquad \therefore \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{u^2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{u^2}.$$

10. Il y a plusieurs approches possibles.

• On peut étudier la fonction $x \longmapsto 2\ln(1+x) - x$, de dérivée $\dfrac{1-x}{1+x} < 0$, qui est donc décroissante sur $[0,1]$ et positive en 1, donc positive sur $[0,1]$.

• On peut alternativement appliquer le théorème des accroissements finis à $u(x) = \ln(1+x)$ entre 0 et x, d'où $\ln(1+x) - 0 = (x-0)u'\big(c(x)\big)$ avec $c(x) \in]0,1[$, d'où, comme $\ln(1+x) \geqslant \dfrac{x}{2}$ car $u'(t) = \dfrac{1}{1+t} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

• On peut enfin utiliser la concavité de la fonction u pour dire que la courbe de la fonction est située au-dessus de la corde passant par les points $(0,0)$ et $(1,\ln 2)$, ce qui donne $\ln(1+x) \geqslant \ln(2)x$, dont on déduit $2\ln(1+x) \geqslant (2\ln 2)x \geqslant x$, une meilleure inégalité que celle de l'énoncé.

En prenant $x = u^2/n$ dans l'inégalité obtenue et en utilisant la croissance de l'exponentielle, on en déduit

$$\forall u \in \big[0,\sqrt{n}\big] : \left(1+\frac{u^2}{n}\right)^{-n} = \exp\left[-n\ln\left(1+\frac{u^2}{n}\right)\right] \leqslant \mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

11. (3/2). Pour tout $u \geqslant 1$, on a $\mathrm{e}^{-u^2} \leqslant \mathrm{e}^{-u}$ (il suffit en fait de montrer la majoration pour u suffisamment grand), d'où la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ par comparaison avec $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u$.

11. (5/2). Pour $u \geqslant 0$, on pose $f_n(u) = \left(1+\dfrac{u^2}{n}\right)^{-n} \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}(u)$. La suite de fonctions $\left(\mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}\right)_n$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$, d'où, d'après la question 9, la convergence simple de $(f_n)_n$ vers e^{-u^2} sur $\mathbb{R}_+$. Enfin, la majoration de la question 10, donne une domination intégrable de $(f_n)_n$ d'après la question 11 (3/2). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée en partant de l'expression obtenue à la question 8, qui donne $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$.

12. D'après la question 7, $\lim \sqrt{n} I_n = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Par parité,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \overset{(x\sqrt{2}=u)}{=} 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}(\sqrt{2}\,\mathrm{d}x) = \sqrt{2\pi}.$$

13. On effectue une intégration par parties en intégrant $u\mathrm{e}^{-u^2/2}$, de primitive $-\mathrm{e}^{-u^2/2}$. Il vient, le crochet admettant une limite finie,

$$\begin{aligned}
\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u &= \int_x^{+\infty} u\mathrm{e}^{-u^2/2} \times \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u}\right]_x^{u\to+\infty} - \int_x^{+\infty}\left(-\mathrm{e}^{-u^2/2}\right)\times\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u^2}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{x} \qquad \because
\end{aligned}$$

$$0 \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{u^2}\,\mathrm{d}u \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{x^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \underset{x\to+\infty}{=} \mathfrak{o}\left(\int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u\right).$$

Problème 2 — Mines-Ponts, PC, 2017

Partie 1 — Exponentielle tronquée

14. $R_n(x)$ est un reste de la série de terme général $\dfrac{n^k x^k}{k!}$; cette série converge car on y reconnaît le développement en série (entière) de l'exponentielle (on peut aussi appliquer la règle de d'Alembert). Ainsi,

$$T_n(x) + R_n(x) = \mathrm{e}^{nx}.$$

15. On applique la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{nt}$ entre 0 et $x > 0$ (on pourrait aussi l'appliquer à $t \mapsto \mathrm{e}^t$ entre 0 et nx) :

$$\mathrm{e}^{nx} = T_n(x) + \int_0^x \frac{(x-u)^n}{n!}\left(n^{n+1}\mathrm{e}^{nu}\right)\mathrm{d}u \underset{(t=x-u)}{=} T_n(x) + \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^x t^n \mathrm{e}^{n(x-t)}\,\mathrm{d}t = T_n(x) + \frac{n^{n+1}\mathrm{e}^{nx}}{n!}\int_0^x \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^n \mathrm{d}t,$$

d'où l'expression de $R_n(x)$ par différence à l'identité de la question 14.

16. On a

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+2} y^{n+1} n!}{(n+1)!\, n^{n+1} y^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} y \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}\, y \quad \text{car} \\
\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} &= \exp\left[(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \exp\left(1+\mathfrak{o}(1)\right).
\end{aligned}$$

Si $y < \mathrm{e}^{-1}$, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ et, par la règle de d'Alembert, que $\sum a_n$ converge, donc que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

17. La fonction $\psi\colon t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$ est dérivable de dérivée $\psi'(t) = (1-t)\mathrm{e}^{-t}$. Elle est donc strictement croissante sur $[0,1]$, puis décroissante ensuite ; elle admet un unique maximum, atteint en $t = 1$ où elle vaut $1/\mathrm{e}$. Pour $x \in]0,1[$, on en déduit, en utilisant les questions 15, puis 16 avec la valeur $y = M$,

$$M = \sup_{t\in[0,x]} \psi(t) = \psi(x) < \psi(1) = \mathrm{e}^{-1} \quad \therefore \quad 0 \leqslant R_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{nx}\frac{n^{n+1}}{n!}M^n x \leqslant a_n \mathrm{e}^{nx} = \mathfrak{o}(\mathrm{e}^{nx}) \quad \therefore$$

$$\forall x \in]0,1[\colon T_n(x) = \mathrm{e}^{nx} - R_n(x) = \mathrm{e}^{nx} + \mathfrak{o}(\mathrm{e}^{nx}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{e}^{nx}.$$

18. Il n'est pas nécessaire de montrer la convergence *a priori*. Pour $(p,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{t^p}_{u} \underbrace{\mathrm{e}^{-nt}}_{v'} \,\mathrm{d}t = \left[t^p\left(-\frac{1}{n}\mathrm{e}^{-nt}\right)\right]_0^{t\to+\infty} - \int_0^{+\infty} (pt^{p-1}) \times \left(-\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{n}\right) \mathrm{d} = \frac{p}{n}\int_0^{+\infty} t^{p-1}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \qquad \therefore$$

$$\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{n!}{n^{n+1}}.$$

La convergence de chaque intégrale est équivalente à celle de la précédente et, *in fine*, à celle de la dernière intégrale écrite, qui est une intégrale de référence. On en déduit que

$$T_n(x) \overset{(\text{Q14})}{=} \mathrm{e}^{nx} - R_n(x) \overset{(\text{Q15})}{=} \mathrm{e}^{nx} - \frac{n^{n+1}\mathrm{e}^{nx}}{n!}\int_0^x (t\mathrm{e}^{-t})^n\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{nx}\,n^{n+1}}{n!}\left[\frac{n!}{n^{n+1}} - \int_0^x \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^n \mathrm{d}t\right]$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{nx}\,n^{n+1}}{n!}\left[\int_0^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^n \mathrm{d}t - \int_0^x \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^n \mathrm{d}t\right] = \frac{\mathrm{e}^{nx}\,n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^n \mathrm{d}t$$

19. L'étude de fonction de la question 17 montre que $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$ est décroissante sur $[1,+\infty[$, ce qui montre bien, par croissance sur $\mathbb{R}_+$ de $u \mapsto u^{n-1}$, que

$$\forall t \geqslant x > 1 \colon \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^n = \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^{n-1} \times \left(t\mathrm{e}^{-t}\right) \leqslant \left(x\mathrm{e}^{-x}\right)^{n-1}\left(t\mathrm{e}^{-t}\right) \qquad \therefore$$

$$T_n(x)\mathrm{e}^{-nx} = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_x^{+\infty} \left(t\mathrm{e}^{-t}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \frac{n^{n+1}\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)^{n-1}}{n!}\int_x^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \mathfrak{o}\left(\frac{n^{n+1}\left(x\mathrm{e}^{-x}\right)^{n-1}}{n!}\right) = \mathfrak{o}(1)$$

d'après la question 16 et le fait que $x\mathrm{e}^{-x} < 1/\mathrm{e}$ pour tout $x > 1$.

Partie 2 — Méthode de Laplace

20. Les hypothèses H1, H3 et H4 montrent conjointement que f atteint son maximum en 0, point intérieur de l'intervalle $[-1,1]$. Sa dérivée s'y annule donc. Un développement limité de φ à l'ordre 2 au voisinage de 0 donne, en utilisant H2,

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x^2}\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \mathfrak{o}(x^2)\right) \xrightarrow[\substack{x\to0\\x\neq0}]{} \frac{1}{2} = k.$$

21. Il est clair que φ ne prend que des valeurs positives. Comme φ est continue sur $]-1,1[$ et vaut $1/2$ en 0, il existe $\alpha \in]0,1[$ tel que $\varphi(x) \geqslant 1/4$ pour tout $x \in [-\alpha,\alpha]$. De plus, f est continue sur la réunion des deux segments $[-1,-\alpha] \cup [\alpha,1]$, où elle atteint son maximum, disons m, avec $m < 1$ d'après H3 et H4. Corrélativement, pour $x \in [-1,-\alpha] \cup [\alpha,1]$, on a $\varphi(x) \geqslant -\ln m > 0$. En posant $a = \min(1/4, -\ln m)$, il vient $\varphi(x) \geqslant a$ pour tout $x \in [-1,1]$, d'où $\ln(f(x)) \leqslant -ax^2$, puis $f(x) \leqslant \mathrm{e}^{-ax^2}$ par croissance de l'exponentielle.

22.a. Comme f est continue sur $[-1,1]$ et que la fonction nulle est continue, g_n est continue en tout point $x \notin \{-\sqrt{n},\sqrt{n}\}$ et admet en ces points exceptionnels une limite à droite et à gauche, donc est continue par morceaux. Plus précisément (même si ce n'est pas indispensable) :

$$\lim_{\substack{x\to-\sqrt{n}\\x<-\sqrt{n}}} g_n(x) = \lim_{\substack{x\to\sqrt{n}\\x>\sqrt{n}}} g_n(x) = 0, \quad \lim_{\substack{x\to-\sqrt{n}\\x>-\sqrt{n}}} g_n(x) = (f(-1))^n \text{ et } \lim_{\substack{x\to\sqrt{n}\\x<\sqrt{n}}} g_n(x) = (f(1))^n.$$

Ainsi, g_n est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

22.b. À x fixé, $|x| < \sqrt{n}$ à partir d'un certain rang et $x/\sqrt{n}$ tend vers 0 et l'on peut utiliser le développement limité de f à l'ordre 2 :

$$g_n(x) = \exp\left[n\ln\left(f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)\right] = \exp\left[n\ln\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right] = \exp\left[n\ln\left(1 - \frac{x^2}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]$$
$$= \exp\left[-\frac{x^2}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{e}^{-x^2/2}.$$

22.c. Pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée, il reste à trouver la fonction h. Celle-là est donnée par la question 21, qui assure que l'on peut prendre $h(x) = \mathrm{e}^{-ax^2}$ car

$$\forall x\colon |x| \leqslant \sqrt{n} \Longrightarrow |g_n(x)| = \left| f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right|^n \leqslant \exp\left[-na\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^2\right] = \mathrm{e}^{-ax^2}.$$

La majoration par h est par ailleurs triviale pour $|x| > \sqrt{n}$. Enfin, la fonction h est continue (p.m.) et majorée par la fonction intégrable de référence $\mathrm{e}^{-a|x|}$ pour tout $|x| \geqslant 1$, donc intégrable. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

22.d. Le changement de variable $u = \dfrac{x}{\sqrt{n}}$, la question précédente et la valeur de l'intégrale de Gauß donnent

$$\int_{-1}^{1} \big(f(u)\big)^n\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Partie 3 — Formules de Bernstein et de Laplace

23. D'après la question 18,

$$n! = n^{n+1} \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t \underset{(x=t-1)}{=} n^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n} \int_{-1}^{+\infty} (x+1)^n \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = n^{n+1}\,\mathrm{e}^{-n}(I_n + J_n).$$

24. On peut étudier la fonction $\xi(x) = 2^x - x - 1$. On a $\xi'(x) = (\ln 2)2^x - 1$, fonction clairement croissante telle que $\xi'(1) = 2\ln 2 - 1 > 0$. La fonction ξ est donc croissante, d'où $\xi(x) \geqslant \xi(1) = 0$. Mais c'est aussi une inégalité de convexité : la droite $y = x + 1$ coupe la courbe de la fonction convexe $x \mapsto 2^x$ en 0 et en 1, donc se situe sous cette courbe en dehors de l'intervalle $[0, 1]$. En appliquant cette majoration à l'intégrale J_n, il vient

$$J_n = \int_1^{+\infty} (x+1)^n \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{+\infty} 2^{nx}\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-(1-\ln 2)nx}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{-(1-\ln 2)n}}{(1-\ln 2)n} = \left(\frac{2}{\mathrm{e}}\right)^n \frac{1}{(1-\ln 2)\,n}.$$

25. On applique la méthode de Laplace (partie II) à la fonction $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$. Toutes les vérifications sont faciles, mais il faut les faire. On calcule $f'(x) = -x\mathrm{e}^{-x}$, ce qui donne le tableau de variations ci-dessous, dont on déduit les hypothèses H1, H3 et H4.

x	-1		0		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$2/\mathrm{e}$

On calcule encore $f''(x) = (x-1)\mathrm{e}^{-x}$, d'où $f''(0) = -1$, soit H2. On peut alors appliquer le résultat de la question 22.d, qui assure que $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \big(f(x)\big)^n\,\mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{2\pi}{n}}$.

26. D'après la question 24 et le fait que $\mathrm{e} > 2$, $I_n + J_n \sim I_n$ et, d'après la question 23,

$$n! = n^{n+1}\mathrm{e}^{-n}(I_n + J_n) \sim n^{n+1}\mathrm{e}^{-n} I_n \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

27. On utilise la question 15.

$$R_n(1) = \frac{\mathrm{e}^n n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (t\mathrm{e}^{-t})^n\,\mathrm{d}t = \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 t^n \mathrm{e}^{n(1-t)}\,\mathrm{d}t \underset{(u=1-t)}{=} \frac{n^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n \mathrm{e}^{nu}\,\mathrm{d}u.$$

28. On applique la méthode de Laplace à la fonction $f_1(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$. On peut noter que $f_1(x) = f(-x)$, où $f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$ est la fonction à laquelle on a appliqué la méthode de Laplace à la question 25. Les hypothèses H1 à H4 sont invariantes par cette transformation ($f \mapsto f_1$) et il n'y a donc pas d'autre justification à produire. En utilisant alors la formule de Stirling, il vient

$$I_1(n) = \int_0^1 (1-u)^n \mathrm{e}^{nu}\,\mathrm{d}u \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \therefore \quad R_n(1) = \frac{n^{n+1}}{n!} I_1(n) \sim n^{n+1}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n (2\pi n)^{-1/2}\sqrt{\frac{\pi}{2n}} \sim \frac{\mathrm{e}^n}{2}.$$

On en déduit que $T_n(1) = \mathrm{e}^n - R_n(1) \sim \dfrac{\mathrm{e}^n}{2}$.

Partie 4 — Première répétition

29. Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. Tout tirage commençant par $1-2-2-\cdots-2-1$ avec $k-2$ occurrences de 2 donne $X = k$. Comme chaque tirage est de probabillité n^{-n-1}, cele montre que $\mathbf{P}(X = k) \geqslant n^{-n-1} > 0$. Notons, même si cela n'est pas demandé, que les autres valeurs de k sont impossibles, soit $X(\Omega) = [\![2, n+1]\!]$.

30. Par définition de la probabilités conditionnelle, et compte tenu de ce que l'on conditionne par un événement de probabilité non nulle en vertu de la question précédente, ce qui assure que ce conditionnement a un sens,

$$\mathbf{P}(X > k+1 \,|\, X > k) = \frac{\mathbf{P}\left[(X > k+1) \cap (X > k)\right]}{\mathbf{P}(X > k)} = \frac{\mathbf{P}(X > k+1)}{\mathbf{P}(X > k)}$$

puisque $(X > k+1) \subset (X > k)$.

31. Pour $k \geqslant 1$, $\mathbf{P}(X > k+1 \,|\, X > k)$ est le probabilité, après k tirages distincts, que la boule tirée suivante ne soit pas l'une des k premières. Elle vaut donc $\dfrac{n-k}{n}$. Comme $\mathbf{P}(X > 1) = 1$, la formule de récurrence établie à la question 30 donne

$$\mathbf{P}(X > k) = \mathbf{P}(X > 1)\prod_{j=1}^{k-1} \mathbf{P}(X > j+1 \,|\, X > j) = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{n-j}{n} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,n^{k-1}} = \frac{n!}{(n-k)!\,n^k}.$$

Notons qu'il est facile d'établir le résultat directement par dénombrement : il y a n^k tirages de k boules distincts, dont $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ consistent en k boules distinctes (arrangement).

32. C'est une formule du cours de deuxième année (dans le cas d'une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ ne prenant un nombre fini ou infini de valeurs). On réalise une transformation d'Abel adaptée :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=2}^{n+1} k\,\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k\left[\mathbf{P}(X > k-1) - \mathbf{P}(X > k)\right] =$$
$$\sum_{k=2}^{n} (k+1-k)\,\mathbf{P}(X > k) + 2\underbrace{\mathbf{P}(X > 1)}_{1} - \underbrace{\mathbf{P}(X > n+1)}_{0} = \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k).$$

33. On peut conclure :

$$\mathbf{E}(X) \overset{\text{(Q32)}}{=} \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(X > k) \overset{\text{(Q31)}}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(n-k)!\,n^k} = \frac{n!}{n^n}\sum_{k=1}^{n} \frac{n^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{n!\,T_n(1)}{n^n} \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(Q28)}}{\sim}} \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{2n^n} \overset{\text{(Q26)}}{\sim} \sqrt{\frac{\pi n}{2}}.$$