Compléments sur les séries numériques

1. Rappels

Pour une suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ réelle ou complexe, on peut définir les *sommes partielles* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Si le *terme général* u_n n'est défini que pour $n \geqslant n_0$, on prend $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, que l'on considère pour $n \geqslant n_0$.

Par convention, l'on pose $\sum_{k=a}^{b} u_k = 0$ si $a > b$ (attention, c'est une différence avec la relation de Chasles pour les intégrales — on considère ici que l'on somme sur l'ensemble vide des $\{k \in \mathbb{N};\ a \leqslant k \leqslant b\}$ et une somme vide est nulle, comme un produit vide vaut 1). On récupère le terme général u_n à partir des sommes partielles par $u_n = S_n - S_{n-1}$.

Définition 1. *La série* $\sum u_n$ *converge si la suite de ses sommes partielles* $(S_n)_n$ *converge. En ce cas, on note* $\sum_{k=n_0}^{\infty} u_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ *la somme de la série. Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.*

Si $(u_n)_n$ est à termes positifs, la suite de ses sommes partielles est croissante et la série de terme général u_n (notée conventionnellement $\sum u_n$) converge si, et seulement si, la suite de ses sommes partielles est majorée.

Proposition 1. ***1.*** *Pour que* $\sum u_n$ *converge, il est nécessaire (mais non suffisant) que* $\lim u_n = 0$.
2. *La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes et, en particulier, pas de l'indice de départ de la somme. En revanche, sa somme, pourvu qu'elle converge, dépend de tous ses termes.*

La première propriété se montre en passant à la limite dans la relation $u_n = S_n - S_{n-1}$. La deuxième vient de ce qu'une modification des premiers termes modifie les sommes partielles à une constante additive près. Le fait que la première propriété ne soit pas suffisante se vérifie sur la série harmonique $\sum 1/n$ en montrant que

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = 1/2.$$

Si $\neg(\lim u_n = 0)$, on dit que la série *diverge grossièrement.*

Remarque 1. L'analogie avec les intégrales impropres est forte. Pourtant, on note quelques différences. Ainsi, $\sum u_n$ et $\int_a^b f$ sont des notations et n'ont pas de valeur numérique, en tout cas avant que l'on ait prouvé la convergence en ce qui concerne l'intégrale. Si l'on indique les bornes des intégrales (qui font que $\int_a^b f$ désigne à la fois l'intégrale et sa valeur alors que la notation fait la distinction pour les séries entre $\sum u_n$ et $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$), c'est que dans le cas des intégrales, la nature de celle-ci change en fonction de a et de b (pensez à $\int_0^1 t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{\infty} t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t$), alors que, pour les séries, la seule limite possible consiste à faire tendre l'indice maximum de sommation vers l'infini.

Bref : il faut être précis avec les notations et l'on écrit « $\sum u_n$ converge (ou diverge) » (nature, pas de bornes) et « $\sum_{k=2}^{\infty} u_k = \sqrt{2}$ » (valeur, bornes obligatoires). Si u_n dépend d'un paramètre, on indique bien sûr celui sur lequel on somme. Ainsi, $\sum_n \frac{1}{m^2+n}$ diverge, mais $\sum_m \frac{1}{m^2+n}$ converge.

Définition 2. *Si* $\sum u_n$ *est une série convergente, on peut définir la suite de ses restes* $(R_n)_n$ *par* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$.

Remarque 2. Attention, cela fait beaucoup de suites, qu'il ne faut pas confondre : $(u_n)_n$, $(S_n)_n$ et $(R_n)_n$, cette dernière n'étant définie que si $\sum u_n$ converge. Pour tout $n \geqslant n_0$, si la série converge, on a $S_n + R_n = \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n$, où l'on a pris $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. Notez que les restes sont ou bien *tous* convergents (si la série converge), ou bien *tous* divergents et que s'ils sont convergents, on a toujours $\lim R_n = 0$.

2. Comparaisons

2.1. **Théorème de comparaison.** L'analogie avec les intégrales impropres est ici complète. S'il n'est pas facile, et souvent impossible, de calculer une primitive pour étudier la nature d'une intégrale en revenant à la définition, la situation pour les sommes partielles est franchement désespérée. En gros, on sait calculer uniquement les sommes partielles des séries géométriques (voir plus bas) et des séries télescopiques (analogues discrets de l'intégration d'une primitive)... qu'il n'est pas toujours évident de mettre sous forme télescopique quand le terme général n'est pas déjà exprimé sous cette forme. L'exemple le plus simple de série télescopique est la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ que l'on écrit $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. C'est pourquoi l'on a besoin d'un outil de comparaison pour se ramener à des séries de référence.

Définition 3. *La série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si $\sum |u_n|$ est convergente. On dit alors que la suite $(u_n)_n$ est* sommable.

Les suites sommables sont les analogues des fonctions intégrables.

Théorème 1. *Toute série absolument convergente est convergente.*

La preuve la plus simple s'appuie sur l'encadrement $0 \leqslant u_n + |u_n| \leqslant 2|u_n|$. On peut aussi passer par les parties positive et négative.

Une série $\sum u_n$ à termes complexes converge si, et seulement si, $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent. La série $\sum u_n$ est absolument convergente si, et seulement si $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ le sont.

Théorème 2. *Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites respectivement réelle ou complexe et réelle positive.*

(1) Si $|u_n| \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge absolument.

(2) Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ (donc, en particulier, si $u_n = \mathfrak{o}(v_n)$) et si $\sum v_n$ est absolument convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente.

(3) S'il existe une constante non nulle C telle que $u_n \sim Cv_n$, alors $\sum v_n$ est absolument convergente si, et seulement si, $\sum u_n$ est absolument convergente. En particulier, si $v_n > 0$ à.p.c.r., les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature. Cela s'étend à l'hypothèse plus faible $u_n = \Theta(v_n)$.

Un premier point fondamental est que, comme dans le cas des intégrales, le théorème de comparaison s'applique à la convergence absolue et, en particulier, à la convergence tout court quand le terme général des séries est de signe constant à.p.c.r., convergence et convergence absolue étant alors trivialement équivalentes. Les séries de référence sont les séries géométriques et les séries de Riemann. Les séries de Bertrand sont un exercice intéressant, mais le résultat est hors programme ; elles ne peuvent pas être utilisées sans démonstration.

Proposition 2. *1. Pour $a \in \mathbb{C}$, la série $\sum a^n$ converge si, et seulement si, $|a| < 1$. On a alors $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \dfrac{1}{1-a}$.*

2. La série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. Pour $\alpha > 1$, on note $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ (fonction zeta de Riemann).

Un deuxième point fondamental, en matière de rédaction, est que le théorème de comparaison fait manipuler *le terme général* de la série et conclut quant à la série elle-même, de même que, pour les intégrales impropres, on manipule *la fonction intégrée* et l'on conclut sur l'intégrale.

2.2. **Comparaison séries-intégrales.**

2.2.1. *Principe.* Soit $u_n = f(n)$ avec f **monotone**. Cela permet d'encadrer u_n par deux intégrales :

$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n = f(n) \leqslant \int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (f \text{ croissante}),$$
$$\int_{n}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n = f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \quad (f \text{ décroissante}).$$

La relation de Chasles permet de sommer les relations ci-dessus pour encadrer des sommes partielles de séries divergentes ou des restes de séries convergentes.

2.2.2. *Le théorème de comparaison.*

Théorème 3. *Soit $f\colon [a,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante. Soit $u_n = f(n)$. Alors, la série $\sum u_n$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.*

Ce théorème est bon à connaître, mais il est sorti du programme. Il faut savoir le redémontrer à partir des encadrements. Application aux séries de Riemann : la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

2.2.3. *Recherche d'équivalents.* Prenons l'exemple des séries de Riemann. Si $0 < \alpha < 1$, la série de Riemann diverge et la fonction $t \longmapsto t^{-\alpha}$ est décroissante

$$\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$. De même, si $\alpha > 1$, la série de Riemann et l'intégrale convergent et la fonction $t \longmapsto t^{-\alpha}$ est décroissante, d'où

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{(n+1)^{1-\alpha}}{\alpha-1} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$.

2.3. **Comparaison avec une série géométrique : la règle de d'Alembert.**

Théorème 4. *Soit $(u_n)_n \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ ne s'annulant pas pour $n \geqslant n_0$. On suppose que $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \ell \in [0,+\infty]$. Alors,*
— *si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument ;*
— *si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement ;*
— *si $\ell = 1$, on ne peut rien dire.*

Ce critère est très utile pour les séries entières ; pour les séries numériques, il faut que la suite soit de monotonie au moins exponentielle ; il s'applique bien quand le calcul de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ est l'occasion de simplifications (présence de puissances ou de factorielles notamment) et fort mal en général. Le dernier cas, dit *douteux*, n'est pas vide : ainsi, ℓ vaut 1 pour toutes les séries de Riemann, convergentes comme divergentes.

Attention : on considère $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ et non simplement le quotient. L'inégalité $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| < 1$ dit simplement que la suite $(|u_n|)_n$ est décroissante (donc convergente), ce qui est très insuffisant pour en inférer quoi que ce soit quant à la nature de la série $\sum u_n$.

2.4. **Comparaison suites-séries.** La nature d'une série est définie par la nature d'une suite, celle de ses sommes partielles. Étudier une série, c'est donc étudier une suite. La réciproque est vraie et est plus intéressante car on dispose d'outils spécifiques pour les séries (théorème de comparaison, convergence absolue, comparaison avec une intégrale) alors que les méthodes disponibles pour l'étude des suites constituent un ensemble assez pauvre. Pour étudier une suite, il est ainsi parfois intéressant de passer par la série associée, en l'espèce une série télescopique. La proposition suivante est évidente, mais elle est donc bien utile.

Proposition 3. *Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe. Alors, la suite $(u_n)_n$ converge, si, et seulement si, la série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge.*

Il est notamment intéressant de passer par la série quand l'expression de $u_{n+1}-u_n$ est plus simple que celle de u_n.

Exemple 1. Soit à étudier la convergence de la suite $u_n = 2\sqrt{n} - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. La divergence de la série de Riemann d'exposant 1/2 montre que l'on a une forme indéterminée. On calcule

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{1/2}\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \frac{1}{\sqrt{n}} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

Par comparaison avec les séries de Riemann, la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge, donc $(u_n)_n$ converge.

On peut aussi procéder ici en utilisant la comparaison série-intégrale :

$$u_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{k}}\right);$$

cela permet de représenter u_n comme la somme partielle d'une série convergente car

$$0 \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k-1}} - \frac{1}{\sqrt{k}},$$

série télescopique convergente (noter que u_n s'interprète bien graphiquement).

Exemple 2. *Développement asymptotique de la somme partielle de la série harmonique.*
Posons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln n$. On a $u_1 = 0$ et l'on calcule

$$0 \leqslant u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{2n^2}.$$

Il s'ensuit que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge, donc que la suite $(u_n)_n$ converge. Plus précisément, en posant $\gamma = \lim u_n$, on a

$$0 < u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(u_k - u_{k-1})}_{>0} = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t}\right] < \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 1,$$

d'où $0 < \gamma < 1$. On peut assez facilement gagner encore un terme en notant que la comparaison série-intégrale donne, par intégration des équivalents (hors programme, mais facile à prouver),

$$u_n = \gamma - \sum_{k=n}^{\infty} (u_{k+1} - u_k) \quad \text{avec} \quad \sum_{k=n}^{\infty} (u_{k+1} - u_k) \sim \int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{2t^2} = \frac{1}{2n} \qquad \therefore$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n + \ln n + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathfrak{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Théorème 5 (Formule de Stirling)**.** $n\,! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$

La formule est utile, officiellement au programme (mais pas sa démonstration) et à connaître par cœur, même si elle est parfois redonnée dans les sujets d'écrit. L'application de la proposition 3 à la suite

$$u_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \frac{1}{2}\ln n,$$

suivie d'un passage à l'exponentielle donne l'équivalent à la valeur de la constante $\sqrt{2\pi}$ près, plus délicate à obtenir.

Le théorème ci-dessous, au programme de MPSI, donc non exigible, mais utilisable, est une autre application de la comparaison suite-série.

Théorème 6 (Théorème de Bolzano-Weierstraß)**.** *De toute suite réelle bornée, on peut extraire une sous-suite convergente. Autrement dit, si $(u_n)_n$ est réelle bornée, il existe une suite d'entiers naturels strictement croissante $(n_k)_k$ telle que $(u_{n_k})_k$ converge.*

3. Séries alternées

3.1. **Le critère spécial (C.S.S.A).** On appelle *série alternée* une série réelle $\sum v_n$ telle que $v_n v_{n+1} \leqslant 0$ pour tout n. Autrement dit, c'est une série numérique dont les termes sont de signe alterné. Elle peut aussi s'écrire $\pm \sum (-1)^n u_n$ avec $u_n = |v_n| \geqslant 0$.

Théorème 7. *Soit $\sum v_n$ une série à termes réels. On suppose que $v_n v_{n+1} \leqslant 0$ pour tout n et que la suite $\big(|v_n|\big)_n$ est décroissante de limite nulle. Alors,*

(i) la série $\sum v_n$ est convergente ; plus précisément :

(ii) si $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} v_k$, les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes ;

(iii) la somme $S = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{\infty} v_k$ est de même signe que le premier terme v_{n_0} de la série et majorée en valeur absolue par son premier terme $|v_{n_0}|$, de même que toutes ses sommes partielles ;

(iv) les propriétés précédentes s'appliquent ainsi de manière immédiate aux restes $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} v_k$ de la série.

Application 1. Séries de Riemann alternées : la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est
$i)$ absolument convergente si, et seulement si, $\alpha > 1$;
$ii)$ convergente si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Remarque 3. — Le CSSA ne se réduit pas au premier item du théorème ; on s'en sert beaucoup pour l'étude des séries de fonctions.
— On a souvent à traiter en exercice des séries de signes alternées qui ne vérifient pas les hypothèses du critère spécial faute de décroissance. Il y a alors principalement deux méthodes : regrouper les termes deux par deux, ou réaliser un développement asymptotique du terme général. Pour la deuxième méthode, on essaye en général d'aller jusqu'à un terme donnant lieu à une série de signe constant ou à une série absolument convergente.

Exemple 3. Étude de la nature de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}_{\sum \text{ CV}} - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\sum \text{ DV}} + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\sum \text{ ACV}},$$

d'où la divergence de la série. On peut aussi s'arrêter au premier terme de signe constant, qui permet alors de conclure en utilisant le théorème de comparaison. Dans l'exemple précédent, cela revient à écrire

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + v_n \quad \text{avec} \quad v_n = u_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sim -\frac{1}{n}.$$

Comme $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente, $\sum u_n$ est de même nature que $\sum v_n$, qui diverge.

4. Produit de Cauchy

Théorème 8. *Soient* $\sum a_n$ *et* $\sum b_n$ *deux séries absolument convergentes. Posons* $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. *Alors, la série* $\sum c_n$ *est absolument convergente et* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$.

La preuve repose sur le cas des séries à termes positifs et sur l'expression des sommes partielles :

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{(i,j)\in T_n} a_i b_j \quad \text{et} \quad \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right) = \sum_{(i,j)\in C_n} a_i b_j,$$

avec C_n est le carré discret $[\![0,n]\!]^2$ et T_n le triangle discret $\{(i,j) \in C_n \,:\, i+j \leqslant n\}$.

Le produit de Cauchy est notamment intéressant quand on traite des séries entières et on l'utilise en probabilités. L'idée du regroupement des termes vient du produit des polynômes :

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j\right) = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{r=\max(k-m,0)}^{\min(k,n)} a_r b_{k-r}\right) X^k = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k.$$

Ci-dessus, c_k est la somme des $a_i b_j$ pour $\left\{(i,j) \in [\![0,n]\!] \times [\![0,m]\!];\ i+j=k\right\}$ et l'on peut, à condition d'ajouter des coefficients nuls au polynôme ($a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > m$), écrire la formule plus simple $c_k = \sum_{r=0}^{k} a_r b_{k-r}$. C'est ce que l'on retrouve pour le produit de Cauchy de deux séries.

Exemple 4. Si les deux séries sont semi-convergentes, le produit peut diverger ou converger.

— pour $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ si $n \geqslant 1$ et $a_0 = b_0 = 0$, on calcule

$$c_n = 2(-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \frac{2(-1)^n \ln n}{n} + \frac{2\gamma(-1)^n}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

à partir du développement asymptotique de l'exemple 2, soit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$, d'où la convergence de $\sum c_n$.

— Pour $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ si $n \geqslant 1$ et $a_0 = b_0 = 0$, une étude de fonction (celle de $x \longmapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$) donne

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{n} = \frac{2(n-1)}{n},$$

d'où une divergence grossière.

On peut montrer qu'il suffit que l'une des deux séries soit absolument convergente et l'autre convergente (théorème de Mertens, hp) et que si les trois séries convergent, alors la somme de la troisième est toujours le produit des sommes des deux autres (théorème d'Abel, hp). Il peut enfin arriver que $\sum c_k$ converge alors que $\sum a_k$ et $\sum b_k$ divergent, comme le montre l'exemple suivant : $a_0 = 1$, $b_0 = -1$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = 2^{n-1}$ et $b_n = 1$, qui donne $c_0 = -1$ et $c_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

5. Autres compléments

5.1. Exemples de développements en série entière.
On étudiera plus tard un chapitre complet sur les séries entières. On se contente ici d'en mentionner par anticipation trois exemples.

Définition 4. *On appelle* série entière *une fonction de la forme* $x \longmapsto \sum_{n=1} a_n x^n$, *où* $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

- $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$
- $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < 1$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$
- $\forall z \in \mathbb{C}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$
- $\forall x \in]-1,1]$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x)$
- $\forall x \in [-1,1[$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

5.2. **Sommation sur une partie infinie de $\mathbb{N}$.** Certains exercices considèrent des « séries extraites ». Par exemple, celle associée aux termes d'indices pairs. En notant $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs, $\displaystyle\sum_{n\in 2\mathbb{N}} u_n$ est une autre façon d'écrire $\displaystyle\sum_k u_{2k}$. Toutefois, toutes les parties infinies de $\mathbb{N}$ ne se décrivent pas aussi facilement.

Définition 5. *Soient A une partie infinie de $\mathbb{N}$ et $(u_n)_n$ une suite. La série $\displaystyle\sum_{n\in A} u_n$ est la série $\sum \mathbb{1}_A(n)u_n$.*

Avec cette définition, $\displaystyle\sum_{n\in 2\mathbb{N}} u_n$ est la série $u_0+0+u_2+0+u_4+\cdots$, ce qui n'est certes pas exactement la même écriture que $u_0+u_2+u_4+\cdots$, mais en a les mêmes propriétés, notamment la nature de la série et sa somme en cas de convergence. De manière générale, si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, alors il existe une unique suite d'entiers strictement croissante $(n_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $A=\{n_k\,;\ k\in\mathbb{N}\}$. Une autre façon de représenter la série $\displaystyle\sum_{n\in A} u_n$ est $\displaystyle\sum_k u_{n_k}$. Ainsi, les sommes partielles de $\displaystyle\sum_{n\in A} u_n$ peuvent s'écrire :

$$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{1}_A(n)u_n, \qquad \sum_{\substack{0\leqslant n\leqslant N\\ n\in A}} u_n, \qquad \sum_{n\in[\![0,N]\!]\cap A} u_n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{N} u_{n_k}.$$

Noter que les trois premières sommes sont égales (somme des termes d'indice inférieur ou égal à N appartenant à A), alors que la dernière compte davantage de termes (potentiellement) non nuls (on a supprimé les 0 venant des entiers n'appartenant pas à A et l'on somme sur les N premiers indices appartenant à A).

Proposition 4. *Si $\sum u_n$ est absolument convergente et si $A\subset\mathbb{N}$, alors $\displaystyle\sum_{n\in A} u_n$ est absolument convergente.*

La démonstration est immédiate en utilisant le théorème de comparaison à partir de $0\leqslant \mathbb{1}_A(n)|u_n|\leqslant |u_n|$. On peut aussi passer par les sommes partielles en écrivant $\displaystyle 0\leqslant \sum_{n\in A\cap[\![0,N]\!]} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{N} u_n$. Le résultat ne s'étend pas à la convergence comme le montre la série harmonique alternée et $A=2\mathbb{N}$.

5.3. **Transformation d'Abel (hp).** Soient $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$ deux suites réelles ou complexes. Soit, pour tout $n\geqslant 1$, la somme partielle

$$A_n = a_1+a_2+\cdots+a_n.$$

La transformation d'Abel, analogue discrète de l'intégration par parties, est l'identité

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n-1} A_k(b_k-b_{k+1}) + A_n b_n.$$

On en déduit que si $(A_k)_k$ est bornée et si $(b_k)_k$ est positive, décroissante et de limite nulle, alors la série $\sum a_k b_k$ est convergente.

Exemple 5. Si $z\in\mathbb{U}\setminus\{1\}$, où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des complexes de module 1, alors la série $\displaystyle\sum \frac{z^k}{k}$ converge.

5.4. **Formule d'Euler-Maclaurin (hp).** C'est un raffinement de la comparaison série-intégrale. À l'ordre 1, si f est de classe $\mathscr{C}^1$, une intégration par parties donne

$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_0^{1/2} v\left[f'\left(k+\frac{1}{2}+v\right) - f'\left(k+\frac{1}{2}-v\right)\right]\mathrm{d}v,$$

relation que l'on peut sommer sur k. Si f est suffisamment dérivable, on peut poursuivre les intégrations par parties, qui font alors intervenir les *nombres de Bernoulli* et obtenir des développements asymptotiques de sommes partielles et de restes de séries, quand la comparaison série-intégrale donne des équivalents. Il n'est pas utile d'apprendre la formule ci-dessus ; les problèmes de concours qui en traitent guident évidemment les calculs.

5.5. **Ailleurs.** Le chapitre sur les espaces vectoriels normés contient une application des résultats sur la convergence des suites extraites à la sommation par paquets. Des compléments sur la sommabilité en vue des probabilités seront présentés plus tard dans l'année.