

Problème 1

L'objet du problème est l'étude de la vitesse de convergence de suites réelles. On utilise les notations suivantes :

— $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ désigne l'espace-vectoriel des suites réelles indicées à partir de 0 ;

— E désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ formé par les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergentes telles que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \geq N : u_k \neq \lim_{n \rightarrow \infty} u_n;$$

— à toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E , on associe sa limite $\ell(u)$ et la suite $(u_n^c)_n$ définie à partir d'un certain rang et donnée par $u_n^c = \left| \frac{u_{n+1} - \ell(u)}{u_n - \ell(u)} \right|$;

— E^c désigne l'ensemble des éléments $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E tels que $(u_n^c)_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente ;

— si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^c$ et si $c(u) = \lim u_n^c$, on dit que la *vitesse de convergence* de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

- *lente* si $c(u) = 1$;
- *géométrique de rapport* $c(u)$ si $0 < c(u) < 1$;
- *rapide* si $c(u) = 0$;

— pour $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ de limite $\ell(u)$ et r un réel strictement supérieur à 1, on dit que la *vitesse de convergence* de u vers $\ell(u)$ est d'ordre au moins r si la suite de terme général $\left| \frac{u_{n+1} - \ell(u)}{(u_n - \ell(u))^r} \right|$ est bornée ;

— une suite est dite *stationnaire* si elle est constante à.p.c.r.

A. Résultats généraux

Q 1. Montrer que l'ensemble E^c est non vide.

Q 2. L'ensemble E^c est-il un espace vectoriel ?

Q 3. Montrer que E^c est un sous-ensemble strict de E .

Q 4. Soit $(u_n)_n \in E^c$. Montrer que $c(u) \in [0, 1]$.

Q 5. Soient u et v deux suites de E^c . Montrer que si $\ell(u) = \ell(v) = 0$ et $c(u) < c(v)$, alors $u_n = o(v_n)$.

B. Exemples de détermination de la vitesse de convergence

Dans cette partie, on détermine sur des exemples la vitesse de convergence, lente, géométrique de rapport $c(u)$ ou rapide.

Q 6. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $q \in]0, 1[$. Montrer que les suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ données respectivement par $u_n = (n+1)^{-k}$, $v_n = n^k q^n$ et $w_n = \frac{1}{n!}$ appartiennent à E^c et donner leur vitesse de convergence.

Q 7. On considère la suite $(I_n)_n$ donnée pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) e^{-x} dx$.

a. Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ est bien définie.

b. Montrer que $u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1+u) \leq u$ pour tout $u \in \mathbb{R}_+$.

c. En déduire une constante a telle que $I_n = \frac{a}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers l'infini.

d. Montrer que $(I_n)_{n \geq 1} \in E^c$ et donner sa vitesse de convergence.

e. (5/2) Retrouver l'équivalent de I_n sans utiliser d'encadrement en réalisant une intégration par parties, puis en appliquant le théorème de convergence dominée.

Q 8. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_n = \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^{2^n}$. Montrer que $(x_n)_n \in E^c$ et donner sa vitesse de convergence.

Q 9. Soit $\alpha > 1$. La série de Riemann $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ converge; on note ℓ sa somme. On note $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$. Montrer que $(S_n)_{n \geq 1} \in E^c$ et donner sa vitesse de convergence.

C. Vitesse de convergence d'ordre r

Q 10. Montrer qu'une suite dont la vitesse de convergence est d'ordre au moins $r > 1$ est à convergence rapide.

Q 11. *Reste du développement en série entière de l'exponentielle.*

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ et $R_n(x) = e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

a. Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un élément de E .

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $R_n(x) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. En déduire que la vitesse de convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est rapide.

c. Montrer que la vitesse de convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est d'ordre au moins r pour aucune valeur de $r > 1$. Est-elle plus rapide ou plus lente?

Q 12. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial (*i.e.* de longueur strictement positive), $f: I \rightarrow I$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge. On note ℓ sa limite et l'on suppose que f est dérivable en ℓ .

a. Montrer que $f(\ell) = \ell$ (on dit que ℓ est un *point fixe* de f).

b. Montrer que si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire, alors elle appartient à E^c . Donner sa vitesse de convergence en fonction de $f'(\ell)$.

c. Montrer que si $|f'(\ell)| > 1$, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

d. Soit r un entier supérieur ou égal à 2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^r$ et que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas stationnaire. Montrer que la vitesse de convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est d'ordre au moins r si, et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1, r-1 \rrbracket$, $f^{(k)}(\ell) = 0$.

Problème 2

Dans tout le problème, X est un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ sur le corps des réels et T un endomorphisme non nul de X . On rappelle qu'une homothétie est un multiple scalaire de l'identité et qu'un projecteur est un endomorphisme P tel que $P^2 = P$. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note I_n la matrice identité ; 0 désigne la matrice nulle quelle que soit sa taille s'il n'y a pas d'ambiguïté.

A. Préliminaires

Q 13. Soit P un projecteur de X . Vérifier que $X = \text{Ker}(P) \oplus \text{Im}(P)$ et que $\text{Im}(P) = \text{Ker}(P')$, où $P' = \text{id}_X - P$. Exprimer $\text{Im}(P')$ et $\text{Ker}(P')$ en fonction de $\text{Im}(P)$ et de $\text{Ker}(P)$.

Q 14. Soit P un projecteur de X . Exprimer $\text{tr}(P)$ en fonction de $\text{Im}(P)$.

Q 15. Soit S une somme finie de projecteurs. Montrer que $\text{tr}(S) \in \mathbb{N}$ et que $\text{tr}(S) \geq \text{rg}(S)$.

Q 16. Soit une matrice par blocs de la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$. Soient A' une matrice semblable à A et D' une matrice semblable à D . Montrer que M est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array} \right)$.

B. Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que T n'est pas une homothétie.

Q 17. Démontrer qu'il existe un vecteur $x \in X$ tel que x et $T(x)$ ne soient pas colinéaires. En déduire qu'il existe une

base $\mathcal{B}$ de X dans laquelle $\text{mat}_{\mathcal{B}}(T) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & A & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array} \right)$, où $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ (les coefficients $*$ prenant des valeurs non précisées). En particulier, on impose ici uniquement la première colonne.

Q 18. En utilisant la question précédente, montrer en raisonnant par récurrence sur n , que toute matrice de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Soit $(t_1, \dots, t_n)$ une suite de n nombres réels vérifiant $\text{tr}(T) = \sum_{i=1}^n t_i$.

Q 19. En dimension $n = 2$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle la matrice de T a pour diagonale (t_1, t_2) .

Q 20. En dimension $n \geq 3$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{C}$ de X telle que $\text{mat}_{\mathcal{C}}(T) = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & B & \\ * & & & \end{array} \right)$, où B n'est pas une matrice d'homothétie.

Q 21. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ de X dans laquelle la matrice de T a pour diagonale $(t_1, \dots, t_n)$.

C. Décomposition en somme de projecteurs de rang 1

On suppose désormais que $T \in \mathcal{L}(X)$ vérifie $\text{tr}(T) \in \mathbb{N}$ et $\text{tr}(T) \geq \text{rg}(T)$.

Q 22. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de X dans laquelle $\text{mat}_{\mathcal{B}}(T) = \left(\begin{array}{c|c} T_1 & 0 \\ \hline T_2 & 0 \end{array} \right)$, où $T_1 \in \mathcal{M}_{\text{rg}(T)}(\mathbb{R})$.

Q 23. On suppose tout d'abord que T_1 n'est pas une matrice d'homothétie. En utilisant la partie précédente, montrer l'existence d'une base $\mathcal{B}'$ de X dans laquelle $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(T) = \left(\begin{array}{c|c} T'_1 & 0 \\ \hline T'_2 & 0 \end{array} \right)$, où $T_1 \in \mathcal{M}_{\text{rg}(T)}(\mathbb{R})$ admet comme termes diagonaux des entiers naturels non nuls. En déduire que T est la somme d'un nombre fini de projecteurs de rang 1.

Q 24. On suppose que T_1 est une matrice d'homothétie. Montrer que T est la somme d'un nombre fini de projecteurs de rang 1.

Q 25. Énoncer le théorème démontré.