DM 2 - PSI* - 2025-2026

CCMP 2016 - PSI 2 (légèrement modifié)

Notations

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Étant donnés deux entiers naturels n et p non nuls, on note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ayant exactement un coefficient non nul, situé en position (i, j) et de valeur 1. La transposée d'une matrice M sera notée M^T.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ les sous-ensembles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ constitués respectivement des matrices symétriques, antisymétriques et triangulaires supérieures strictes, c'est-à-dire triangulaires supérieures à diagonale nulle.

Notation 1 *Etant donné un entier naturel non nul n, un sous-espace vectoriel V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et un élément j de $[\![1, n]\!]$, on note $C_j(V)$ l'ensemble des matrices de V dont toutes les colonnes sont nulles à l'exception éventuelle de la j-ème.*

Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$, on notera $K(M) \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, $R(M) \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$, $L(M) \in \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ et $a(M) \in \mathbb{K}$ la décomposition de M en blocs suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} K(M) & R(M) \\ \hline L(M) & a(M) \end{array}\right) \tag{1}$$

Cela définit en particulier des fonctions $K\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$, évidemment linéaires.

Objectifs

Définition 2 *Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est* nilpotente *si elle admet un polynôme annulateur de la forme X^k avec $k \in \mathbb{N}^*$. On dit que A est* quasi-nilpotente *lorsqu'elle ne possède aucune valeur propre non nulle dans $\mathbb{K}$. Une partie V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dite* quasi-nilpotente *lorsque tous ses éléments sont quasi-nilpotents.*

On se propose d'étudier les sous-espaces vectoriels quasi-nilpotents de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En particulier, le résultat principal que nous souhaitons établir s'énoncé comme suite.

Théorème (Dimension des espaces quasi-nilpotents). *Pour tout s.e.v. quasi-nilpotent N de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$,*

$$\dim V \leqslant \frac{n(n-1)}{2}. \tag{QN}$$

La clef pour démontrer ce résultat réside dans le lemme suivant, démontré dans la partie C.

Lemme (Lemme des colonnes). *Pour tout sous-espace vectoriel V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ quasi-nilpotent, il existe un élément j de $[\![1, n]\!]$ tel que $C_j(V) = \{0\}$.*

A. Exemples

Dans cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Est-elle quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$? Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ est quasi-nilpotente vue comme matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et déterminer leur dimension.

3. Montrer que $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ est quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Soit $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top AX = 0$. En déduire que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Montrer qu'il n'existe pas de matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{PMP^{-1}\,;\ \ M \in \mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{R})\}.$$

Indication : on pourra commencer par étudier le cas $n = 2$, en utilisant par exemple la matrice D introduite à la question 1.

6. Montrer que toute matrice nilpotente est quasi-nilpotente, que la réciproque est vraie pour les matrices complexes et fausse pour les matrices réelles.

B. Cas réel

Dans cette partie, n désigne un entier naturel non nul.

7. Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ qui sont quasi-nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Le résultat obtenu tient-il si l'on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

8. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire de la question précédente que

$$\dim V \leqslant \frac{n(n-1)}{2}$$

et que cette majoration est optimale.

C. Lemme des colonnes

On se propose ici de démontrer le lemme des colonnes par récurrence sur l'entier n.

9. Justifier que le lemme des colonnes est vrai dans le cas $n = 1$.

Dans la suite, on fixe un entier naturel $n \geqslant 2$ et on suppose le lemme des colonnes vrai pour l'entier $n-1$. On se donne un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On raisonne par l'absurde en supposant que $C_j(V) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On introduit le sous-ensemble V' de V constitué de ses matrices de dernière colonne nulle. Toute matrice M de V' s'écrit donc par blocs comme suit :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ K(M) & \vdots \\ & 0 \\ \hline L(M) & 0 \end{array}\right).$$

10. Montrer que l'ensemble $K(V') = \{K(M)\,;\ M \in V'\}$ est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

11. En déduire qu'il existe un entier $j \in [\![1, n-1]\!]$ tel que $E_{n,j} \in V$.

Soit σ une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans lui même. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. On considère l'application linéaire u_σ de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^n$ définie sur la base canonique par

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}.$$

On considère la matrice P_σ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ donnée par $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

12. Vérifier que u_σ est inversible et préciser son inverse.

13. Vérifier que P_σ est la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Montrer que P_σ est inversible et préciser les coefficients de son inverse.

14. Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, préciser les coefficients de $P_\sigma^{-1} M P_\sigma$ en fonction de ceux de M et de σ. (On pourra utiliser un changement de base.)

15. Montrer que l'ensemble

$$V^\sigma = \{P_\sigma^{-1} M P_\sigma \mid M \in V\}$$

est un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et que $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

16. En déduire que pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ on peut choisir $f(j) \in [\![1, n]\!] \setminus \{j\}$ tel que $E_{j,f(j)} \in V$. On obtient ainsi une fonction $f \colon [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$.

17. En considérant les images successives de 1, montrer qu'il existe une suite finie $(j_1, \ldots, j_p)$ d'éléments deux à deux distincts de $[\![1, n]\!]$ telle que

$$\forall k \in [\![1, p-1]\!],\ f(j_k) = j_{k+1} \quad \text{et} \quad f(j_p) = j_1.$$

18. Ecrire un programme `cycle(f)` en `python` permettant d'identifier une telle suite connaissant les valeurs de f.

19. Démontrer que 1 est valeur propre de la matrice $N = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} E_{j_k, f(j_k)}$ et conclure.

D. Cas général

On va ici prouver l'inégalité (QN) par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est trivialement vrai. On fixe donc un entier naturel $n \geqslant 2$ et l'on suppose l'inégalité (QN) établie au rang $n-1$. Soit V un sous-espace vectoriel quasi-nilpotent de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On rappelle que l'on peut écrire toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et, en particulier, de V, sous la forme (1) et qu'en particulier, les applications $K \colon V \to \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et $L \colon V \to \mathscr{M}_{1,n-1}(\mathbb{K})$ sont linéaires. On introduit le sous-espace vectoriel $W = \mathrm{Ker}(L)$.

Jusqu'à la question 21 incluse, on suppose que $C_n(V) = \{0\}$.

20. Montrer que $\dim V \leqslant \dim K(W) + (n-1)$.

21. En déduire que $\dim V \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

On ne suppose plus désormais que $C_n(V) = \{0\}$.

22. Démontrer que $\dim V \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

DM 6 - PSI* - 2019-2020 - Corrigé
Mines PSI 2016

A. Exemples

1. On calcule $\chi_D = \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2+1$, qui n'a pas de racine réelle, donc D est quasi-nilpotente en tant qu'élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. En revanche, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \{-i, i\}$, donc D n'est pas quasi-nilpotente en tant qu'élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

On calcule $\chi_B = \begin{vmatrix} X-1 & -i \\ -i & X+1 \end{vmatrix} = X^2$, donc $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ et B est bien quasi-nilpotente (et donc nilpotente tout court). Alternativement, on peut calculer $B^2 = 0$, ce qui montre que B est nilpotente, donc quasi-nilpotente. On peut noter que la matrice B donne un exemple de matrice symétrique non diagonalisable ; cela sera utile à la question 7.

2. Cette question est dans l'adhérence du cours. D'après le rapport du jury, celui-ci attendait une solution complète et formelle. Notons $T\colon A \mapsto A^\mathsf{T}$ l'application de transposition, laquelle définit un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = E_1(T)$ (espace propre associé à la valeur propre 1) et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = E_{-1}(T)$. Enfin,

$$\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}\left(E_{i,j};\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\right) \qquad \therefore \qquad \dim \mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K}) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

et l'on obtient bien ainsi des s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour calculer la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, montrons que $\left\{E_{i,i} \quad 1 \leqslant i \leqslant n\right\} \cup \left\{E_{i,j} + E_{j,i}\ ;\ 1 \leqslant i < j \leqslant n\right\}$ est une famille libre et génératrice (non ordonnée) de $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$. Si $S = (s_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, alors

$$S = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} s_{i,j}E_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} s_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} s_{i,j}(E_{i,j} + E_{j,i}).$$

La famille considérée est bien génératrice et il est clair que la décomposition, partant de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est unique. Aussi a-t-on $\dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = n + \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Enfin, T étant une symétrie, on a $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = E_1(T) \oplus E_{-1}(T)$, donc $\dim \mathscr{A}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) - \dim \mathscr{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

3. Les matrices de $\mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ sont triangulaires, donc leur spectre se lit sur leur diagonale, qui est constituée de 0. Leur spectre vaut donc toujours $\{0\}$, ce qui en fait des matrices quasi-nilpotentes (nilpotentes tout court, en fait).

4. Pour $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, on note que $X^\mathsf{T}AX \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_1(\mathbb{R})$, d'où

$$X^\mathsf{T}AX = (X^\mathsf{T}AX)^\mathsf{T} = X^\mathsf{T}A^\mathsf{T}X^{TT} = -X^\mathsf{T}AX \qquad \therefore \qquad X^\mathsf{T}AX = 0.$$

Cette écriture est classique quand on a étudié les endomorphismes des espaces euclidiens. Sinon, on peut alternativement écrire (formule du produit (dominos)) :

$$X^\mathsf{T}AX = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i a_{i,j} x_j = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} a_{i,i}x_i^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_{i,j} + a_{j,i})x_i x_j = 0 + 0 = 0.$$

Si $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$, il vient par ailleurs

$$0 = X^\mathsf{T}AX = X^\mathsf{T}(\lambda X) = \lambda X^\mathsf{T}X = \lambda \sum_{1\leqslant i\leqslant n} x_i^2 = \lambda \left\|X\right\|_2^2.$$

Comme $X \neq 0$, $\left\|X\right\|_2 \neq 0$, donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0\}$, donc A est quasi-nilpotente en tant que matrice réelle (l'exemple de la matrice D de la question 1 montre que ce n'est pas vrai si l'on considère A comme une matrice complexe). Par définition, $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est donc quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Si $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{PMP^{-1}\ ;\ M \in \mathscr{T}_n^{++}(\mathbb{R})\}$ pour une certaine matrice P, il s'ensuit que toute matrice antisymétrique est semblable à une matrice nilpotente, donc est elle-même nilpotente. La matrice D montre que c'est faux pour

$n=2$ car $D^2=-I_2$, soit $D^{4m}=I_n\neq 0$. En dimension n, la matrice diagonale par blocs $D'=\left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0_{\mathscr{M}_{n-2}(\mathbb{R})}\end{array}\right)$ donne un contrexemple, car elle n'est pas nilpotente, vu que $D'^{4m}=\mathrm{diag}(1,1,0,\dots,0)$.

6. Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors elle admet un polynôme annulateur de la forme X^p, donc $\mathrm{Sp}(A)\subset\{0\}$ et A est donc quasi-nilpotente.

— Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $\mathrm{Sp}(A)\neq\varnothing$, donc A est quasi-nilpotente *ssi* $\mathrm{Sp}(A)=\{0\}$ *ssi* A est nilpotente *ssi* $\chi_A=X^n$.

— Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, A est quasi-nilpotente *ssi* $\mathrm{Sp}(A)\subset\{0\}$ *ssi* $\chi_A=QX^p$ avec Q produit de polynômes unitaires de degré 2 à discriminant strictement négatif et $0\leqslant p\leqslant n$, le cas $p=n$ et $Q=1$ correspondant à A nilpotent.

B. Cas réel

7. Si $S\in\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, alors S est diagonalisable et n'est donc quasi-nilpotente que si $S=0$. Le résultat est faux sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{C})$ comme le montre la matrice B de la question 2 en dimension 2. De même qu'à la question précédente, le contrexemple s'étend immédiatement à la dimension n en considérant la matrice par blocs $B'=\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0_{\mathscr{M}_{n-2}(\mathbb{R})}\end{array}\right)$.

8. Soit V un s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ quasi-nilpotent dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 7, il est en somme directe avec $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, donc $\dim V+\dim\mathscr{S}_n(\mathbb{R})\leqslant\dim\mathscr{M}_n(\mathbb{R})=n^2$, soit $\dim V\leqslant\dfrac{n(n-1)}{2}$. Le cas $V=\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ et la question 5 montrent que la majoration est optimale.

C. Lemme des colonnes

Il faut relire un certain nombre de fois l'énoncé du *lemmes des colonnes* pour le comprendre... Comme l'énoncé s'est approprié la notation habituelle C_j, on introduit $\mathrm{Col}_j(A)$ pour la $j$ème colonne de la matrice A. Ainsi, pour un s.e.v. V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $C_j(V)=\big\{M\in V\ ;\ \forall i\in[\![1,n]\!]\setminus\{j\}\colon\ \mathrm{Col}_i(M)=0\big\}$. Le lemme des colonnes affirme que, pour tout sev V de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ quasi-nilpotent, il existe un indice j tel que V ne contienne aucune matrice dont seule la $j$ème colonne serait non nulle. Comme on raisonne par l'absurde, on suppose donc à partir de la dixième question que, pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, V contient une matrice M dont $\mathrm{Col}_j(M)$ est la seule colonne non nulle.

9. Si $n=1$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension 1 et la matrice nulle est la seule matrice quasi-nilpotente, donc $V=\{0\}$. On prend $j=1$ et il est alors vrai que V ne contient aucune matrice dont la première colonne (ici, l'unique coefficient) serait non nulle. C'est évidemment une trivialité, mais il faut bien initialiser la récurrence (et le rapport précise que cette question idiote n'a pas été aussi bien réussie que cela).

10. L'ensemble V' contient la matrice $0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$, donc $K(V')$ contient $0_{\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})}$. De plus, V' est un s.e.v. comme intersection de deux s.e.v. (V et l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont la dernière colonne est nulle) et K est linéaire, donc $K(V')$ est un s.e.v. de $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Enfin, toute matrice $M\in V'$ est triangulaire inférieure par blocs, donc $\chi_M=X\chi_{K(M)}$, d'où $\mathrm{Sp}(K(M))\subset\mathrm{Sp}(M)\subset\{0\}$, donc $K(M)$ est quasi-nilpotente.

11. Appliquons l'hypothèse de récurrence à $K(V')$: il existe $j_0\in[\![1,n-1]\!]$ tel que $C_{j_0}(K(V'))=\{0\}$. L'hypothèse sur V assure que $C_{j_0}(V)\neq\{0\}$. Cela signifie que V contient une matrice non nulle M dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la j_0-ème. Comme $j_0\leqslant n-1$, $\mathrm{Col}_n(M)=0$, donc $M\in V'$. Enfin, $C_{j_0}(K(V'))=\{0\}$ assure que $\mathrm{Col}_{j_0}(K(M))=0$, puisque $\mathrm{Col}_j(K(M))=0$ pour tout $j\neq j_0$. Il s'ensuit que le seul coefficient non nul de M se trouve en position (n,j_0), donc que M est multiple de E_{n,j_0}. Comme V' est un espace vectoriel, $E_{n,j_0}\in V$.

12. Soit $(\sigma,\sigma')\in\mathfrak{S}_n^2$. Alors,

$$\forall j\in[\![1,n]\!]\colon\ u_\sigma\circ u_{\sigma'}(e_j)=u_\sigma\big(u_{\sigma'}(e_j)\big)=u_\sigma\big(e_{\sigma'(j)}\big)=e_{\sigma(\sigma'(j))}\quad\therefore\quad u_\sigma\circ u_{\sigma'}=u_{\sigma\circ\sigma'}.$$

En particulier, $u_\sigma\circ u_{\sigma^{-1}}=u_{\mathrm{id}}=\mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. Comme $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie, u_σ est inversible et ${u_\sigma}^{-1}=u_{\sigma^{-1}}$.

13. Soit $Q_\sigma=(q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par définition, $\mathrm{Col}_j(Q_\sigma)$ est le vecteur des coordonnées de $u_\sigma(e_j)=e_{\sigma(j)}$ dans la base canonique, ce qui donne $q_{i,j}=\delta_{i,\sigma(j)}$ pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Ainsi, $Q_\sigma=P_\sigma$. La question 12 montre alors que P_σ est inversible et que ${P_\sigma}^{-1}=P_{\sigma^{-1}}$, d'où $\big[{P_\sigma}^{-1}\big]_{i,j}=\delta_{i,\sigma^{-1}(j)}=\delta_{\sigma(i),j}$. Autrement dit, ${P_\sigma}^{-1}=P_\sigma^{\mathsf{T}}$, ce qu'on aurait pu voir tout de suite car les matrices P_σ sont orthogonales.

14. Par définition, P_σ est la matrice de changement de base de $(e_1,\dots,e_n)$ à $(\sigma(e_1),\dots,\sigma(e_n))$. La formule de changement de base entraîne que si $M = \mathrm{mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(f)$, alors $P_\sigma^{-1}MP_\sigma = \mathrm{mat}_{(\sigma(e_1),\dots,\sigma(e_n))}(f)$.

Ainsi, si $P_\sigma^{-1}MP_\sigma = (n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, alors $n_{i,j} = m_{\sigma(i),\sigma(j)}$. Cela peut aussi se retrouver en effectuant le produit matriciel :

$$n_{i,j} = \sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ 1\leqslant \ell\leqslant n}} \delta_{\sigma(i),k}\, m_{k,\ell}\, \delta_{\ell,\sigma(j)} = m_{\sigma(i),\sigma(j)}.$$

15. L'application $M \longmapsto P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ est linéaire et V est un espace vectoriel, donc V^σ est l'image d'un e.v. par une application linéaire, donc un e.v. De plus, $\mathrm{Sp}(P_\sigma^{-1}MP_\sigma) = \mathrm{Sp}(M)$ et M est quasi-nilpotente, donc $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ également.

Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Par hypothèse, $C_{\sigma(j)}(V) \neq \{0\}$. Il existe donc $M \in V\setminus\{0\}$ telle que $\mathrm{Col}_{\sigma(k)}(M) = 0$ pour tout $k \neq \sigma(j)$. Or, les coefficients de $\mathrm{Col}_{\sigma(k)}(M)$ sont, d'après la question 14, une permutation de ceux de $\mathrm{Col}_k(P_\sigma^{-1}MP_\sigma)$. Ainsi, $\mathrm{Col}_k(P_\sigma^{-1}MP_\sigma) = 0$ pour tout k, sauf pour $k = j$, soit $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$.

16. Soit $j \in [\![1,n]\!]$. Si $j = n$, la question 11 donne l'existence de $f(n) \in [\![1,n-1]\!]$ (ce $f(n)$ est le j de la question 11) tel que $E_{n,f(n)} \in V$. Si $j \neq n$, considérons la transposition σ qui échange n et j et laisse les autres entiers de $[\![1,n]\!]$ invariants. D'après la question 15, on peut appliquer la question 11 à V^σ, d'où l'existence de k tel que $E_{n,k} \in V^\sigma$. Alors, $P_\sigma E_{n,k} {P_\sigma}^{-1} = E_{\sigma(n),\sigma(k)} = E_{j,\sigma(k)} \in V$. On pose $f(j) = \sigma(k)$.

17. Soit la suite $(f^m(1))_{m\geqslant 0}$, où l'exposant de f est lié à la composition des applications. Cette suite est à valeurs dans l'ensemble fini $[\![1,n]\!]$, donc il existe par le principe des tiroirs deux entiers $m_1 < m_2$ tels que $f^{m_1}(1) = f^{m_2}(1)$. On les choisit tels que $m_2 - m_1$ soit minimal, ce qui entraîne que $\#\{f^m(1)\ ;\ m_1 \leqslant m < m_2\} = m_2 - m_1$. On prend alors $(j_1, j_2, \dots, j_p) = (f^{m_1}(1), f^{m_1+1}(1), \dots, f^{m_2-1}(1))$.

18. On peut au choix écrire un algorithme en pseudo-code ou utiliser Python.

```
def cycle(f):
    etat, L = 1, []
    while etat not in L:
        L.append(etat)
        etat = f(L[-1])
    debut = L.index(etat)
    return L[debut:]
```

19. Commençons par noter que $E_{i,j}\begin{pmatrix} x_1 & x_1 & \dots & x_n\end{pmatrix}^\mathsf{T}$ est le vecteur colonne dont la composante d'indice ℓ vaut $\delta_{\ell,i}x_j$. Il s'ensuit, en notant $j_{p+1} = j_1$ que $NX_{|j_k} = x_{j_{k+1}}$. Corrélativement, $E_1(N)$ contient la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(\mathbb{1}_J(i))_{1\leqslant i\leqslant n}$, où $J = \{j_1, j_2, \dots, j_p\}$. Or, $N \in V$ car N est une somme d'éléments de V, ce qui contredit la quasi-nilpotence de V et met un point final au raisonnement par l'absurde initié à la question 10.

D. Cas général

20. L'hypothèse $C_n(V) = \{0\}$ se traduit par $\mathrm{Ker}(K)\cap\mathrm{Ker}(L) = \{0\}$. Or, $\mathrm{Ker}(L) = W$, donc $\mathrm{Ker}(K_{|W}) = \{0\}$, soit $\dim K(W) = \dim W$. Le théorème du rang appliqué à L donne alors

$$\dim V = \dim \mathrm{Ker}(L) + \mathrm{rg}(L) = \dim K(W) + \mathrm{rg}(L) \leqslant \dim K(W) + n - 1.$$

21. Si $M \in W$, la matrice M est triangulaire supérieure par blocs et $\chi_M = (X - a(M))\chi_{K(M)}$. Comme M est quasi-nilpotente, il s'ensuit que $a(M) = 0$ et que $K(M)$ est quasi-nilpotente. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et l'inégalité de la question 20 permet d'obtenir

$$\dim V \leqslant \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

22. D'après le lemme des colonnes, il existe $j \in [\![1,n]\!]$ tel que $C_j(V) = \{0\}$. Or, le raisonnement effectué à la question 15 montre qu'alors, $C_n(V^\sigma) = \{0\}$, où σ est la transposition qui échange j et n (ou n'importe quelle permutation telle que $\sigma(j) = n$). Alors, d'après la question 21,

$$\dim V = \dim V^\sigma \leqslant \frac{n(n-1)}{2}.$$