DMS 1 - PSI* — 2024-2025 — Corrigé

Problème 1, CCS PC 2, partie I (légèrement modifiée)

A. Résultats généraux

Q 1. Posons $u_n = a^n$ avec $0 < |a| < 1$. Alors, $u = (u_n)_n$ converge, vers 0, sans jamais prendre la valeur 0, donc $u \in E$. Par ailleurs, $(u_n^c)_n$ est la suite constante de valeur a, donc $u \in E^c$. On peut aussi choisir intelligemment l'un des exemples de la question 5, ce qui fait d'une pierre deux coups...

Q 2. La suite nulle 0 n'appartient pas à E, donc pas à E^c, qui ne peut ainsi être un sous-espace vectoriel de l'espace des suites réelles. On peut aussi noter que l'ensemble E^c n'est pas stable par addition comme le montrent $u_n = 1 - 1/n$ et $v_n = 1 + 1/n$.

Q 3. L'inclusion $E^c \subset E$ est vraie par définition de E^c. Si $u_{2n} = u_{2n+1} = 2^{-n}$, la suite $u = (u_n)_n$ appartient à E avec $\ell(u) = 0$ et $u_{2n}^c = 1$, mais $u_{2n+1}^c = 1/2$, donc $u \notin E^c$.

Q 4. C'est une partie de la règle de d'Alembert, appliquée à la suite $(v_n)_n$ avec $v_n = u_n - \ell(u)$: Comme $u_n^c \geqslant 0$, $c(u) \in [0, +\infty]$. Or, $c(u) > 1$ entraînerait $\lim |v_n| = +\infty$, d'où $\lim |u_n| = +\infty$, ce qui contredirait l'hypothèse $(u_n)_n \in E$.

Q 5. Soient u et v deux suites de E^c de limite nulle telles que $c(u) < c(v)$. Alors, pour $w = u/v$,

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} c(u) < c(v) \xleftarrow[n\to\infty]{} \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \qquad \therefore \qquad \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \div \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{c(u)}{c(v)} < 1.$$

La règle de d'Alembert montre alors que $\sum w_n$ est absolument convergente ; en particulier, $\lim w_n = 0$, ce qui est équivalent à $u_n = \mathfrak{o}(v_n)$.

B. Exemples de détermination de la vitesse de convergence

Q 6. • La suite $(u_n)_n$ tend vers 0, ne s'annule pas et appartient donc bien à E. Par ailleurs, $u_n^c = \dfrac{(n+1)^k}{(n+2)^k}$ a pour limite $c(u) = 1$, donc $(u_n)_n$ est à convergence lente.

• La suite $(v_n)_n$ tend vers 0 par croissances comparées, ne s'annule pas pour $n \geqslant 1$ et appartient donc bien à E. Par ailleurs, $v_n^c = \dfrac{(n+1)^k q}{n^k}$ a pour limite $c(v) = q$, donc $(v_n)_n$ est à convergence géométrique de rapport q.

Ou, plus directement : il est clair que $v_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme v_{n+1}/v_n tend vers $q < 1$, la règle de d'Alembert assure que $\sum v_n$ converge, donc que $\ell(v) = 0$; la limite précédente est donc $c(v)$, donc $(v_n)_n$ est à convergence géométrique de rapport q.

• La suite $(w_n)_n$ tend vers 0, ne s'annule pas et appartient donc bien à E. Par ailleurs, $w_n^c = \dfrac{1}{n+1}$ a pour limite $c(w) = 0$, donc $(w_n)_n$ est à convergence rapide.

Q 7. a. On passe à l'exponentielle et l'on effectue un développement limité.

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m = \exp\left[m \ln\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right] = \exp\left[m\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{2m^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^3}\right)\right)\right] = \exp\left[1 - \frac{1}{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)\right]$$
$$= \mathrm{e}\left[1 - \frac{1}{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right) + \mathcal{O}\left(\left(-\frac{1}{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)^2\right)\right] = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2m} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

En posant $m = 2^n$, il vient $x_n = \mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}}{2^{n+1}} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{2^{2n}}\right)$.

b. On en déduit que $\lim x_n = \mathrm{e}$, que $(x_n)_n \in E$, puisque $x_n - \ell(x_n) \sim -\dfrac{\mathrm{e}}{2^{n+1}}$ et ne peut donc s'annuler àpcr, que $x_n^c \sim \dfrac{-\mathrm{e}/2^{n+2}}{-\mathrm{e}/2^{n+1}} = \dfrac{1}{2}$. Ainsi, $(x_n)_n \in E$ est à convergence géométrique de rapport $\dfrac{1}{2}$.

Q 8. a. La fonction $f\colon x \longmapsto \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-x}$ est continue (p.m.) sur $[0,+\infty[$. De plus,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} (\ln x)\mathrm{e}^{-x} = \big((\ln x)\mathrm{e}^{-x/2}\big)\mathrm{e}^{-x/2} = \mathfrak{o}(\mathrm{e}^{-x/2}),$$

d'où le convergence de l'intégrale I_n par comparaison avec l'intégrale de référence convergente $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\,\mathrm{d}x$.

b. Il y a plusieurs façons d'obtenir l'encadrement : par concavité du logarithme pour la majoration et par étude de fonction ou par l'inégalité de Taylor-Lagrange pour la minoration. Le plus rapide est probablement d'intégrer l'encadrement évident $1-t \leqslant \dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ sur $[0,u]$. Notons que l'on peut appliquer le CSSA à la série entière $\ln(1+u) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{u^n}{n}$, mais cela ne donne l'encadrement que sur $[0,1]$.

c. En appliquant cet encadrement à $u = x/n$, en le multipliant par la quantité positive e^{-x}, puis en intégrant sur $\mathbb{R}_+$, il vient — les intégrales étant convergentes car $x^4\mathrm{e}^{-x}$ tend vers 0 quand x tend vers l'infini, donc $x^k\mathrm{e}^{-x} \underset{x\to+\infty}{=} \mathfrak{o}(1/x^2)$ —

$$\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2n^2}\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Or, $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[-x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\big]_0^{x\to+\infty} = 1$ et l'erreur commise est un $\mathcal{O}(1/n^2)$, donc $I_n \sim \dfrac{1}{n}$.

d. Ainsi, $\ell(I_n) = 0$ et $I_n \neq 0$ pour tout n car la fonction intégrée est strictement positive. Il vient alors $c(I_n) = 1$, d'où une convergence lente.

e. On calcule

$$I_n = \int_0^{+\infty} \underbrace{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}_{u}\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{v'}\,\mathrm{d}x = \left[-\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{x\to+\infty} + \frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\frac{x}{n}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty}\underbrace{\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1+\frac{x}{n}}}_{g_n(x)}\,\mathrm{d}x$$

Il est clair que $(g_n)_n$ converge simplement vers e^{-x} et l'on peut dominer $|g_n| = g_n$ par e^{-x}. Le théorème de convergence dominée s'applique et donne $\lim nI_n = 1$, d'où l'équivalent.

Q 9. C'est un cas typique de comparaison série-intégrale. La fonction $t \longmapsto t^{-\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a, par convergence de la série et des intégrales,

$$\forall k \geqslant 2\colon\ \int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \quad \therefore$$

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} = \int_{n+1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leqslant \ell - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

On aurait pu aussi calculer les intégrales $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ et effectuer une sommation télescopique.

Il s'ensuit que $\ell - S_n \sim \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$. La suite $(S_n)_n$ appartient clairement à E (suite strictement monotone convergente) et $c(S_n) = \lim\dfrac{\ell - S_{n+1}}{\ell - S_n} = 1$, soit une convergence lente.

C. Vitesse de convergence d'ordre r

Q 10. Si $(u_n)_n$ a une vitesse de convergence d'ordre $r > 1$, alors, avec $\ell = \lim u_n$,

$$u_n^c = \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = \frac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^r} \times (u_n - \ell)^{r-1} = \mathcal{O}\big((u_n - \ell)^{r-1}\big).$$

Comme $r - 1 > 0$, on a $c(u) = 0$ et $(u_n)_n$ est bien à convergence rapide.

Q 11. a. La suite $(S_n)_n$ est convergente de limite $e^x > 0$. Les restes de cette suite sont des séries à termes positifs si $x > 0$ et des séries alternées à partir du rang $n = \lceil x \rceil$ si $x < 0$ et l'on sait que la somme d'une série alternée est du signe de son premier terme, en particulier non nulle. La suite $(S_n)_n$ appartient donc à E.

On peut aussi utiliser l'expression intégrale de $R_n(x)$, soit $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, dt$ et noter que la fonction intégrée est continue, non nulle et de signe constant, d'où $R_n(x) \neq 0$. Cela permet de ne pas distinguer selon le signe de x.

b. On peut écrire $R_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} U_n$ avec

$$U_n = 1 + \frac{x}{n+2} + \frac{x^2}{(n+2)(n+3)} + \cdots \quad \therefore \quad |U_n| \leqslant 1 + \frac{|x|}{n+2} + \frac{|x|^2}{(n+2)^2} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{|x|}{n+2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1,$$

d'où $R_n(x) \sim \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$. On en déduit que $\dfrac{|R_{n+1}(x)|}{|R_n(x)|} \sim \dfrac{|x|}{n+2}$, d'où la convergence rapide de $(S_n(x))_n$.

c. L'équivalent obtenu à la question précédente donne

$$Q_n(x) = \frac{R_n(x)}{R_{n-1}^r(x)} \sim \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!^r}{x^{nr}} \qquad \therefore \qquad \frac{Q_{n+1}(x)}{Q_n(x)} = \frac{(n+1)^r}{(n+2)x^{r-1}} \sim \left(\frac{n}{x}\right)^{r-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty,$$

d'où $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n(x) = \infty$. Ainsi, la vitesse de convergence n'est-elle d'ordre au moins r pour aucune valeur de $r > 1$. La convergence de $(S_n)_n$ est rapide, mais moins qu'une convergence d'ordre au moins r.

Remarque. Notons que l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction exponentielle entre 0 et x donne

$$\text{(TL)} \qquad |R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{\substack{0 \leqslant t \leqslant x \text{ ou} \\ x \leqslant t \leqslant 0}} e^t \leqslant e^{|x|} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},$$

mais que cette majoration de $|R_n(x)|$ est insuffisante pour majorer le quotient $\dfrac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}$ car il faut majorer le numérateur et minorer le dénominateur. Toutefois, sans aller jusqu'à trouver un équivalent de $R_n(x)$, on pouvait aussi utiliser la formule de Taylor avec reste intégral pour obtenir un encadrement suffisant, lui, pour conclure :

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{-|x|} \leqslant |R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|} \qquad \therefore \qquad \frac{|R_{n+1}(x)|}{|R_n(x)|} \leqslant \frac{e^{|x|}|x|^{n+2}}{(n+2)!} \times \frac{(n+1)!}{e^{-|x|}|x|^{n+1}} = \frac{e^{2|x|}}{(n+2)},$$

On pouvait enfin utiliser cette majoration du reste en l'appliquant à $R_{n+1}(x)$, ce qui est sans doute *in fine* la solution la plus rapide :

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + R_{n+1}(x) \overset{\text{(TL)}}{=} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \mathcal{O}\left(\frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!}\right) \sim \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Q 12. a. En passant à la limite dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, la continuité de f au point ℓ, assurée par sa dérivabilité, donne $f(\ell) = \ell$.

b. Si $u_{n_0} = \ell$, alors, $u_{n_0+1} = f(u_{n_0}) = f(\ell) = \ell$. Autrement dit, si $(u_n)_n$ n'est pas stationnaire, alors elle ne prend jamais la valeur ℓ. Comme elle converge, elle appartient à E. Alors, d'après la définition de la dérivée,

$$u_n^c = \frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell} = \frac{f(u_n) - f(\ell)}{u_n - \ell} \xrightarrow[n\to\infty]{} f'(\ell).$$

Ainsi, $(u_n)_n$ est à vitesse de convergence lente si $|f'(\ell)| = 1$, géométrique si $0 < |f'(\ell)| < 1$ et rapide si $f'(\ell) = 0$.

c. Comme $(u_n)_n$ n'est pas stationnaire, elle appartient à E^c. D'après la question 4, $c(u) = |f'(\ell)| \in [0, 1]$, d'où le résultat par contraposée.

On peut alternativement utiliser un argument direct : si $|f'(\ell)| > 1$, alors $|u_n^c| \geqslant 1$ à.p.c.r., donc $|u_n - \ell(u)|$ est croissante à.p.c.r. Comme elle tend vers 0, elle est nulle à.p.c.r. ; autrement dit, $(u_n)_n$ est stationnaire.

d. Notons pour abréger $\ell = \ell(u)$. La formule de Taylor-Young donne

$$f(u_n) - f(\ell) = f'(\ell)(u_n - \ell) + \frac{f''(\ell)}{2!}(u_n - \ell)^2 + \cdots + \frac{f^{(r)}(\ell)}{r!}(u_n - \ell)^r + \mathfrak{o}\big((u_n - \ell)^r\big).$$

Notons que $(u_n)_n$ n'étant pas stationnaire, elle appartient à E et l'on a $u_n \neq \ell$ pour tout n.

Supposons qu'il existe $k \in [\![1, r-1]\!]$ tel que $f^{(k)}(\ell) \neq 0$ et considérons la plus petite valeur de k possible. Alors, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^k} = \dfrac{f^{(k)}(\ell)}{k!}$ donc $\dfrac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^r} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{f^{(k)}(\ell)}{k!\,(u_n - \ell)^{r-k}}$ n'est pas bornée.

Réciproquement, si $f^{(k)}(\ell) = 0$ pour tout $k \in [\![1, r-1]\!]$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1} - \ell}{(u_n - \ell)^r} = \dfrac{f^{(r)}(\ell)}{r!}$. Or, toute suite convergente est bornée, donc la vitesse de convergence de $(u_n)_n$ est d'ordre au moins r.

Problème 2 — CCMP PC 1 2014 (modifié)

A. Préliminaires

Q 13. C'est vraiment du cours. En suivant le programme de première année, on procède classiquement par analyse-synthèse. Même si le problème se place en dimension finie, cette première question est valable sans cette hypothèse. Si $X \ni x = y + P(z)$ avec $\big(y, P(z)\big) \in \mathrm{Ker}(P) \times \mathrm{Im}(P)$, alors

$$P(x) = 0_X + P \circ P(z) = P(z),$$

donc $x = (x - P(x)) + P(x)$ est l'unique décomposition envisageable. Comme $x - P(x) \in \mathrm{Ker}(p)$ et $P(x) \in \mathrm{Im}(P)$, elle est correcte, donc $X = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$. De plus, en repartant de $X \ni x = y + P(z)$ avec $\big(y, P(z)\big) \in \mathrm{Ker}(P) \times \mathrm{Im}(P)$, il vient

$$P(x) = P(z) \iff y = 0 \iff P(X) = P \circ P(z) \iff x \in \mathrm{Im}(p),$$

soit $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(P')$, où $P' = \mathrm{id}_X - P$.

Or, $x - P(x) = P'(x) \in \mathrm{Im}(P')$ et $P' \circ P(x) = P(x) - P^2(x) = 0_X$, soit $P(x) \in \mathrm{Ker}(P')$. Enfin,

$$P'^2 = (\mathrm{id}_X - P)^2 = \mathrm{id}_X - 2P + P^2 = P',$$

donc P' est un projecteur. Ainsi, $\mathrm{Ker}(P') = \mathrm{Im}(P)$ et $\mathrm{Im}(P') = \mathrm{Ker}(P)$. Autrement dit, si $P = P_{F//G}$, alors $P' = P_{G//F}$.

Approche par les polynômes annulateurs. Par hypothèse, le polynôme $Q = X^2 - X = X(X-1)$ est annulateur de P, donc $X = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_X - P) = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Ker}(P')$. Comme $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Im}\left(P_{\| \mathrm{Ker}(P')}\right)$ et $P_{\| \mathrm{Ker}(P')} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ker}(P')}$, $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Ker}(P')$, donc $X = \mathrm{Ker}(P) \oplus \mathrm{Im}(P)$. Enfin, $Q(1 - X) = Q$, donc P' est aussi un projecteur et l'on a donc $\mathrm{Im}(P') = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_X - P') = \mathrm{Ker}(P)$.

Q 14. Dans une base adaptée à la décomposition $X = \mathrm{Im}(P) \oplus \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(P') \oplus \mathrm{Ker}(P)$, la matrice de P est $\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, avec $\mathrm{rg}(P)$ *uns* et $\dim X - \mathrm{rg}(P)$ *zéros.* On a donc $\mathrm{tr}(P) = \mathrm{rg}(P) = \dim \mathrm{Im}(P)$.

Q 15. Soit $S = P_1 + \cdots + P_n$ une somme finie de projecteurs. Alors, la sous-additivité du rang et la linéarité de la trace donnent

$$\mathrm{rg}(S) = \mathrm{rg}(P_1 + P_2 + \cdots + P_n) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rg}(P_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{tr}(P_i) = \mathrm{tr}(S) \in \mathbb{N}.$$

Rappelons que la sous-additivité du rang est une propriété liée à la dimension d'une somme de s.e.v :

$$\mathrm{Im}\left(\sum_{i=1}^{n} P_i\right) \subset \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(P_i) \qquad \therefore \qquad \mathrm{rg}(S) \leqslant \dim \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}(P_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \dim \mathrm{Im}(P_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{rg}(P_i).$$

Q 16. Par hypothèse, il existe $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ et $R \in \mathrm{GL}_{n-p}(\mathbb{R})$ telles que $A' = Q^{-1}AQ$ et $D' = R^{-1}DR$. Posons $P = \mathrm{Diag}(Q, R)$. Alors,

$$P\,\mathrm{Diag}\left(Q^{-1}, R^{-1}\right) = \mathrm{Diag}(Q,R)\,\mathrm{Diag}\left(Q^{-1}, R^{-1}\right) = \mathrm{Diag}\left(QQ^{-1}, RR^{-1}\right) = \mathrm{Diag}(I_p, I_{n-p}) = I_n,$$

ce qui montre que P est inversible, d'inverse $\mathrm{Diag}\left(Q^{-1}, R^{-1}\right)$. Alors,

$$P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|c} Q^{-1} & 0 \\ \hline 0 & R^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} Q^{-1}AQ & Q^{-1}BR \\ \hline R^{-1}CQ & R^{-1}DR \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A' & Q^{-1}BR \\ \hline R^{-1}CQ & D' \end{array}\right),$$

qui est bien de la forme attendue. Rappelons que le produit des trois matrices se fait en une fois, les matrices diagonales (par blocs) correspondant à des dilatations (par blocs).

B. Endomorphismes différents d'une homothétie

On suppose dans cette partie que T n'est pas une homothétie.

Q 17. C'est une des caractérisations classiques des homothéties : une homothétie est un endomorphisme pour lequel tout vecteur non nul est propre. Par contraposée, si T n'est pas une homothétie, il existe un vecteur x non nul tel que $\mathrm{Vect}(x)$ n'est pas stable par T, donc tel que x et $T(x)$ ne soient pas colinéaires. Alors, la famille $(x, T(x))$ est libre et le théorème de la base incomplète permet de la compléter en une base $\mathcal{B}$ de X. Dans une telle base, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(T)$ a bien la forme demandée dans l'énoncé.

Il reste à prouver ce lemme sur les homothéties. Soit donc $u \in \mathscr{L}(X)$ et supposons que, pour tout vecteur $x \in X \setminus \{0_E\}$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$, donc que tout vecteur de X non nul est propre pour u. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de X. Alors,

$$\begin{aligned} u\left(\sum_{i=1}^n e_i\right) &= \lambda_{e_1+e_2+\cdots+e_n} \sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n \lambda_{e_1+e_2+\cdots+e_n} e_i \\ &= \sum_{i=1}^n u(e_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_{e_i} e_i, \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition, tous les λ_{e_i} sont égaux, donc $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \lambda_{e_1} I_n$ et f est une homothétie.

Q 18. Montrons par récurrence simple sur n que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle (la preuve est aussi valable sur $\mathbb{C}$). C'est trivial si $n = 1$, puisqu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est nulle. Supposons le résultat vrai sur $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et prenons $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(M) = 0$. Si $M = \lambda I_n$, alors $\mathrm{tr}(M) = n\lambda$, donc M est la matrice nulle, qui est à diagonale nulle. Sinon, la question précédente montre qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}MP = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & A & \\ * & & & \end{array}\right)$ et, par hypothèse de récurrence, une matrice B de diagonale nulle et une matrice $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telles que $Q^{-1}AQ = B$. Posons $S = \mathrm{Diag}(I_1, Q)$. Alors, la question 16 montre que $S^{-1}MS = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & B & \\ * & & & \end{array}\right)$, qui est bien à diagonale nulle.

Q 19. Soit $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{tr}(T) = t_1 + t_2$. Comme T n'est pas une homothétie, $T - t_1\,\mathrm{id}_X$ n'en est pas une non plus et la question 17 montre qu'il existe une base $\mathcal{B}''$ dans laquelle $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}''}(T - t_1\,\mathrm{id}_X) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Dans cette même base, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}''}(T) = \begin{pmatrix} t_1 & a \\ 1 & b + t_1 \end{pmatrix}$. Or, la trace est un invariant de similitude, d'où $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}''}(T) = \begin{pmatrix} t_1 & a \\ 1 & t_2 \end{pmatrix}$.

Q 20. Notons que pour $n = 2$, la question est trivialement fausse, B étant de taille 1, donc nécessairement une homothétie. On suppose $n \geqslant 3$.

Comme dans la question précédente, T n'étant pas une homothétie, $T - t_1 \,\mathrm{id}_X$ n'en est pas une non plus et la question 17 montre alors l'existence d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ telle que

$$\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(T - t_1 \,\mathrm{id}_X) = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & A & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right) \qquad \therefore \qquad \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(T) = \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & * & \cdots & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & B & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \end{array}\right),$$

avec $B = A + t_1 I_{n-1} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Si B n'est pas une matrice d'homothétie, on a répondu à la question.

Si $B = \lambda I_{n-1}$, on considère $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_1 + e_3, e_4, \ldots, e_n)$ (on n'a modifié que le troisième vecteur de la base). La matrice $P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = I_n + E_{1,3}$ est inversible (triangulaire supérieure à coefficients non nuls), donc $\mathcal{B}'$ est une base de X. Le passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ ne modifie pas la première colonne de la matrice de T. En revanche, on sait par hypothèse que $T(e_3)$ est de la forme $T(e_3) = \alpha e_1 + \lambda e_3$, d'où

$$T(e_1 + e_3) = (t_1 + \alpha)e_1 + e_2 + \lambda e_3 = (t_1 + \alpha - \lambda)e_1 + e_2 + \lambda(e_1 + e_3).$$

Ainsi, la troisième colonne de $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(T)$ comporte un 1 en position $(2, 3)$ et la matrice B' que l'on en extrait en en supprimant la première ligne et la première colonne n'est donc pas une matrice d'homothétie.

Q 21. On raisonne par récurrence sur $n \geqslant 2$. Pour $n = 2$, on a démontré la propriété à la question 19. La preuve matricielle de l'hérédité est un copier-coller de celle de la question 18. Supposons le résultat vrai sur $\mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ et prenons $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{tr}(M) = t_1 + \cdots + t_n$. D'après la question 20, il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ telles que $M = P \left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & B & \\ * & & & \end{array}\right) P^{-1}$ et, par hypothèse de récurrence, une matrice C de diagonale $(t_2, t_3, \ldots, t_n)$, puisque $\displaystyle\sum_{i=2}^{n} t_i = \mathrm{tr}(T) - t_1 = \mathrm{tr}(B)$, et une matrice $Q \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telles que $B = QCQ^{-1}$. Alors, la question 16 assure que, pour $S = \mathrm{Diag}(I_1, Q)$, la matrice $S^{-1}MS$ est de la forme $\left(\begin{array}{c|ccc} t_1 & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & C & \\ * & & & \end{array}\right)$. Ainsi, M est bien semblable à une matrice de diagonale $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

C — Décomposition en somme de projecteurs

Q 22. Notons $r = \mathrm{rg}(T)$. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(T)$ dans X. Alors, $X = F \oplus \mathrm{Ker}(T)$ et, dans une base adaptée à cette décomposition, la matrice de T est bien de la forme $\left(\begin{array}{c|c} T_1 & 0_{r,n-r} \\ \hline T_2 & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right)$, où $T_1 \in \mathscr{M}_r(\mathbb{R})$ et $T_2 \in \mathscr{M}_{n-r,r}(\mathbb{R})$.

Q 23. Posons $r = \mathrm{rg}(T)$. La trace étant un invariant de similitude, on a $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(T_1)$. La double hypothèse $\mathrm{tr}(T) \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{tr}(T) \geqslant \mathrm{rg}(T)$ assure alors que l'on peut écrire $\mathrm{tr}(T_1) = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} t_i$ avec $t_i \in \mathbb{N}^*$ — par exemple, $t_i = 1$ pour $1 \leqslant i \leqslant r - 1$ et $t_r = \mathrm{tr}(T) + 1 - r$. La question 21 assure alors que T_1 est semblable à une matrice T_1' dont la diagonale est $(t_1, t_2, \ldots, t_r)$. D'après la question 16, si $T_1' = Q^{-1} T_1 Q$, alors il existe une base $\mathcal{B}'$ de X telle que

$$\mathrm{Diag}\left(Q^{-1}, I_{n-r}\right) \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(T)\, \mathrm{Diag}\left(Q, I_{n-r}\right) = \left(\begin{array}{c|c} T_1' & 0_{r,n-r} \\ \hline T_2' & 0_{n-r,n-r} \end{array}\right) = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(T).$$

Pour conclure, on note qu'une matrice $U = (u_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les colonnes sont nulles sauf celle d'indice j et telle que $u_{j,j} = 1$ vérifie $U^2 = U$. En notant U_j la matrice telle que $C_j(U_j) = \dfrac{1}{t_j} C_j\big(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(T)\big)$ et $C_i(U_j) = 0$ pour $i \neq j$, il vient $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(T) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} t_j U_j$, somme de $\mathrm{tr}(T)$ projecteurs de rang 1.

Q 24. Notons que si $T_1 = \lambda I_r$, alors $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(T_1) = r\lambda$. On se ramène à la question précédente en raisonnant par récurrence sur $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{tr}(T_1)$.

Si $\mathrm{tr}(T) = \mathrm{rg}(T) = r$, alors $\lambda = 1$, $T_1 = I_r$ et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(T)$ peut s'écrire comme une somme de r matrices de projecteurs de rang 1 en utilisant la décomposition par colonnes utilisée à la question précédente. Cela s'applique d'ailleurs plus généralement au cas $\lambda \in \mathbb{N}^*$.

Supposons le résultat exact pour $\mathrm{tr}(T) = m$ avec $m \geqslant \mathrm{rg}(T)$ et considérons le cas où $\mathrm{tr}(T) = m + 1$. Alors, $\mathrm{tr}(T_1) = m + 1 > r$, donc $\lambda > 1$ et l'on peut écrire $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(T) = E_{1,1} + \big(\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(T) - E_{1,1}\big)$. La matrice $E_{1,1}$ est une matrice de projecteur et $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(T) - E_{1,1}$ vérifie les hypothèses de la partie C, ce qui justifie que l'on puisse lui appliquer l'hypothèse de récurrence, donc T est une somme de projecteurs de rang 1.

Q 25. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie peut s'exprimer comme une somme de projecteurs de rang 1 si, et seulement si, sa trace est un entier naturel, supérieur ou égal à son rang (l'énoncé se plaçait sur $\mathbb{R}$, mais n'a jamais utilisé cette hypothèse).