Réduction - Résumé

1. Éléments propres

1.1. Généralités.

Définition 1. *Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

(i) Une droite $D \subset E$ est une droite propre *de f si elle est stable par f.*

(ii) Un vecteur $x \in E$ est un vecteur propre *de f si $\mathrm{Vect}(x)$ est une droite propre de f. Autrement dit, c'est un vecteur $x \neq 0_E$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ vérifiant $f(x) = \lambda x$.*

(iii) Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre *de f s'il existe un vecteur propre x tel que $f(x) = \lambda x$.*

(iv) Si λ est une valeur propre de f, l'espace propre associé est le s.e.v. $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda \mathrm{id}_E) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id}_E - f)$.

(v) Si $\dim E < \infty$, l'ensemble des valeurs propres de f est noté $\mathrm{Sp}(f)$ et appelé spectre de f.

(vi) On appelle éléments propres *de f ses valeurs et espaces propres.*

Ainsi, $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$ si, et seulement si, par définition, $f - \lambda \mathrm{id}_E$ est non injective. L'espace $E_\lambda(f)$ est constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ. En dimension finie, cela revient à dire que $f - \lambda \mathrm{id}_E$ est non inversible. En particulier, 0 est valeur propre de f si, et seulement si, f n'est pas injective (non inversible en dimension finie) et l'on a alors par définition $\mathrm{Ker}\, f = E_0(f)$. C'est le seul lien entre éléments propres et inversibilité. Enfin, $E_\lambda(f)$ est un s.e.v. de E stable par f sur lequel f induit l'homothétie de rapport λ : $f_{\| E_\lambda(f)} = \lambda \mathrm{id}_{E_\lambda(f)}$. Corrélativement, $E_\lambda(f)$ est stable par f.

Les homothéties jouent ainsi un rôle important en matière de réduction. Il est bon de savoir que la matrice d'une homothétie est la même dans toutes les bases, que toute base est un base de diagonalisation pour une homothétie (autrement dit, que tout vecteur non nul est propre), que les homothéties commutent avec tous les endomorphismes. On peut montrer (exercice) que ces propriétés caractérisent toutes les trois les homothéties.

Définition 2. *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les éléments propres de A sont ceux de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, $\phi_A \colon X \longmapsto AX$, qui lui est canoniquement associé.*

Ainsi, les vecteurs propres de A sont les vecteurs-colonnes non nuls de $\mathbb{K}^n$ tels que la famille (AX, X) est liée. Le vecteur $X \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ est propre si, et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$ et $\mathrm{Sp}(A)$ est l'ensemble des λ pour lesquels il existe un tel vecteur X.

Si f est un endomorphisme d'un e.v. de dimension finie E, $\mathcal{B}$ une base de E et $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(f)$ et, si $x \in E$ est un vecteur de E de vecteurs de coordonnées $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans la base $\mathcal{B}$, $f(x) = \lambda x \Longleftrightarrow AX = \lambda X$. Autrement dit, les vecteurs propres de A sont les vecteurs-colonnes des coordonnées des vecteurs propres de f dans la base considérée.

Toute matrice réelle pouvant être aussi considérée comme une matrice complexe, une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ peut être associée à deux endomorphismes, l'un opérant sur $\mathbb{R}^n$ et l'autre sur $\mathbb{C}^n$. On introduit alors la distinction entre $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ et l'on a bien sûr $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$. Les espaces propres correspondant sont de même dimension sur leurs corps respectifs ; plus précisément, $E_\lambda^{(\mathbb{C})}(A) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\left(E_\lambda^{(\mathbb{R})}(A)\right)$.

Proposition 1. *Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre. En d'autres termes, toute famille finie d'espaces propres d'un même endomorphisme est en somme directe.*

Exemple 1. Ce théorème peut permettre de montrer très rapidement que certaines familles sont libres, comme $\left(\cos(ax)\right)_{a \geqslant 0}$ car, si D est l'opérateur de dérivation, $x \longmapsto \cos(ax)$ est vecteur propre de D^2 relativement à la valeur propre $-a^2$.

1.2. Élements propres en dimension finie.

Théorème et définition 1. *Si $\dim E = n < +\infty$ et $f \in \mathcal{L}(E)$, on appelle* polynôme caractéristique *de f la fonction définie sur $\mathbb{K}$ par $x \longmapsto \chi_f(x) = \det(x\, \mathrm{id}_E - f)$. Alors, χ_f est une fonction polynomiale de degré n, dont les racines sont les valeurs propres de f. De plus, $\chi_f = X^n - \mathrm{tr}(f) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f)$.*

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = \det(xI_n - A)$. C'est un invariant de similitude, comme $\mathrm{Sp}(A)$ et, si $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$, alors $\chi_f = \chi_A$.

Propriété. Les racines de χ_A sont exactement ses valeurs propres complexes. Corrélativement, si $P \mid \chi_f$, P non constant, alors $P(f) \notin \mathrm{GL}(E)$.

Exemple 2. Une matrice compagnon est une matrice de la forme $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{p-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{p-1} \end{pmatrix}$. Ces matrices se retrouvent dans l'étude des suites récurrentes linéaires et celle des sous-espaces cycliques (exercices). Le polynôme caractéristique de la matrice ci-dessus est $X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_1 X - a_0$. Il y a plusieurs façons de l'obtenir, la plus simple étant de réaliser la suite de transvections $L_1 \leftarrow L_1 + xL_2 + \cdots + x^{p-1}L_p$ sur la matrice $xI_n - C$, puis de développer par rapport à L_1. Corrélativement, tout polynôme unitaire de degré n est polynôme caractéristique d'une certaine matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 2. *Si F est un sous-espace stable par f, alors $\chi_{f_{\|F}} \mid \chi_f$.*

Corollaire 1. *Si $\chi_f = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)^{n_\lambda(f)}$, alors $1 \leqslant \dim E_\lambda(f) \leqslant n_\lambda(f)$. L'entier $n_\lambda(f)$ est appelé* ordre de multiplicité de la valeur propre λ *(la notation $n_\lambda(f)$ n'est pas universelle).*

Proposition 3. *Tout endomorphisme d'un espace vectoriel non nul complexe de dimension finie admet au moins une valeur propre. Tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie impaire admet au moins une valeur propre.*

Exemple 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors, $\chi_A = \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 + 1$, d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{-i, i\}$.
L'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $P \longmapsto XP$ est à spectre vide.

2. Diagonalisation (dimension finie)

2.1. **Matrices diagonales.** On note $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont, dans l'ordre, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Le calcul sur les matrices diagonales est particulièrement simple ; en particulier, le produit s'y fait terme à terme :

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \times \mathrm{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = \mathrm{diag}(\lambda_1\mu_1, \lambda_2\mu_2, \dots, \lambda_n\mu_n),$$
$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)^p = \mathrm{diag}(\lambda_1^p, \lambda_2^p, \dots, \lambda_n^p),$$

cela valant toujours pour tout $p \in \mathbb{N}$ et, si tous les λ_i sont non nuls, pour tout $p \in \mathbb{Z}$. Plus généralement,

$$\forall P \in \mathbb{K}[X] \colon P\big(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)\big) = \mathrm{diag}\left(P(\lambda_1), P(\lambda_2), \dots, P(\lambda_n)\right).$$

On note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors,

(i) $\det(D) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \cdots \times \lambda_n$;
(ii) $\chi_D = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$;
(iii) $\mathrm{Sp}(D) = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$;
(iv) D est inversible si, et seulement si, aucun des λ_i n'est nul ;
(v) $\mathrm{rg}(D) = \#\{i \,;\, \lambda_i \neq 0\}$;
(vi) $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Vect}(e_i \,;\, \lambda_i \neq 0)$;
(vii) $\mathrm{Ker}(D) = \mathrm{Vect}(e_i \,;\, \lambda_i = 0)$;
(viii) $E_{\lambda_i}(D) = \mathrm{Vect}(e_j \,;\, \lambda_j = \lambda_i)$.

En particulier, $\mathbb{K}^n = \mathrm{Ker}(D) \oplus \mathrm{Im}(D)$, cela n'étant pas vrai en général pour une matrice non diagonalisable (c'est, par exemple, toujours faux pour une matrice nilpotente).

La lecture est la même pour un endomorphisme f dont la matrice dans la base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est $\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ (on remplace simplement D par f dans les huit items précédents).

Il est pratique d'utiliser la notation $\mathrm{Diag}(A_1, A_2, \dots, A_p)$ (avec une majuscule) pour les matrices diagonales par blocs. Les règles de calcul (produit, polynômes, inverse) s'étendent aux matrices diagonales par blocs. En particulier, $\mathrm{Diag}(A_1, A_2, \dots, A_p)$ est inversible, si, et seulement si, A_k est inversible pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ et l'on a alors

$$\operatorname{Diag}(A_1, A_2, \ldots, A_p)^{-1} = \operatorname{Diag}\left(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \ldots, A_p^{-1}\right).$$

Cette formule est utile pour réduire des matrices définies par blocs.

2.2. **Endomorphismes diagonalisables.**

Définition 3. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de f. De manière équivalente, il existe une base de E (la même) dans laquelle* $\operatorname{mat}(f)$ *est diagonale.*

D'après la proposition 1, On a toujours $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} E_\lambda(f) = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} E_\lambda(f)$; ce sous-espace de E est stable par f.

Théorème 1. *Caractérisations de la diagonalisabilité. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f est diagonalisable si, et seulement si, l'une des conditions équivalents suivantes est vérifiée :*

(i) $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} E_\lambda(f) = E$;

(ii) χ_f *est scindé et, pour tout* $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$, $\dim E_\lambda(f) = n_\lambda(f)$;

(iii) $\displaystyle\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} \dim E_\lambda(f) = \dim E.$

$\Lambda = \displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} E_\lambda(f)$ est toujours un s.e.v. de E stable par f. L'endomorphisme f est diagonalisable si, et seulement si, $\Lambda = E$. Si λ est une valeur propre de f, $E_\lambda(f)$ est stable par f et f induit sur $E_\lambda(f)$ l'homothétie $\lambda \mathrm{id}_{E_\lambda(f)}$. Ainsi, f est diagonalisable si, et seulement s'il existe une décomposition $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ de E en sous-espaces stables par f sur lesquels f induit un homothétie (la réciproque est évidente).

Proposition 4. Condition <u>suffisante</u> de diagonalisabilité. *Si $\#\operatorname{Sp}(f) = \dim E$, les n espaces propres sont des droites vectorielles et f est diagonalisable.*

Si $\#\operatorname{Sp}(f) = 0$, f n'est évidemment pas diagonalisable. Si $\#\operatorname{Sp}(f) = 1$, f est diagonalisable si, et seulement si, f est une homothétie. Si f est diagonalisable, on a $\operatorname{Im}(f) = \displaystyle\bigoplus_{\substack{\lambda \in \operatorname{Sp}(f) \\ \lambda \neq 0}} E_\lambda(f)$, d'où $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

2.3. **Matrices diagonalisables.**

Définition 4. *La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$, $\phi_A \colon X \longmapsto AX$, qui lui est canoniquement associé, l'est. De manière équivalente, une matrice carrée est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Soit $\mathcal{B} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base de l'espace des colonnes $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n$. Par définition, la matrice de passage $P = P_{\mathrm{can} \to \mathcal{B}}$ est telle que $C_j(P) = X_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une base de vecteurs propres de A avec $AX_j = \lambda_j X_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ si, et seulement si, $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(\phi_A) = P^{-1}AP = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Ainsi, les colonnes de P sont les vecteurs propres de A rangés dans le même ordre que les valeurs propres le sont dans D. Évidemment, cet ordre est arbitraire, même si l'on regroupe en général les valeurs propres multiples afin que les espaces propres soient engendrés par des colonnes successives de P.

Aussi une matrice A est-elle diagonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice diagonale, ou encore, s'il existe E un e.v. de base $\mathcal{B}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable tel que $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$. Si c'est le cas, c'est vrai de tout endomorphisme de matrice A.

Proposition 5. *Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, A est diagonalisable si, et seulement si, $A^\top$ l'est.*

Plus précisément, A et $A^\top$ ont même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec les mêmes multiplicités et $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A^\top)$ (mais les espaces sont différents).

Mentionnons enfin en *spoiler* du chapitre sur les espaces euclidiens un résultat très utile.

Théorème 2 (Théorème spectral)**.** *Toute matrice symétrique* réelle *est diagonalisable et ses espaces propres sont deux à deux orthogonaux relativement au produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*

3. Trigonalisation (dimension finie)

3.1. **Matrices triangulaires.** Soit $T = (t_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une matrice triangulaire. On note $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors,

(i) $\det(T) = t_{1,1} \times t_{2,2} \times \cdots \times t_{n,n}$;

(ii) T est inversible si, et seulement si $t_{i,i} \neq 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$;

(iii) $\chi_D = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - t_{i,i})$;

(iv) $\mathrm{Sp}(D) = \{t_{1,1}, t_{2,2}, \ldots, t_{n,n}\}$;

(v) T est triangulaire supérieure ssi $F_k = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est stable par T pour tout $k \in [\![1, n]\!]$;

(vi) T est triangulaire inférieure ssi $G_k = \mathrm{Vect}(e_k, \ldots, e_n)$ est stable par T pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Les ensembles $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (matrices triangulaires supérieures) et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ (matrices triangulaires inférieures) sont des s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ stables par produit et passage à l'inverse (pour celles qui sont inversibles). Les ensembles $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ (matrices triangulaires supérieures à diagonale nulle) et $\mathcal{T}_n^{--}(\mathbb{K})$ (matrices triangulaires inférieures à diagonale nulle) sont des s.e.v. de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ également stables par produit ; les matrices de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{T}_n^{--}(\mathbb{K})$ sont nilpotentes ; T^k compte k diagonales nulles à partir de la diagonale de base.

3.2. **Endomorphismes trigonalisables.**

Définition 5. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle* $\mathrm{mat}(f)$ *est triangulaire.*

Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_n, e_{n-1}, \ldots, e_1)$, si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est triangulaire supérieure, alors $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ est triangulaire inférieure (mais n'est pas la transposée de la matrice précédente).

Théorème 3. *Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si, et seulement si, χ_f est scindé. En particulier, tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe est trigonalisable.*

Tout part du fait que tout polynôme complexe non constant admet au moins une racine. En particulier, tout endomorphisme complexe en dimension finie est à spectre non vide. Notons qu'en dimension infinie, l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $P \longmapsto XP$ n'a pas de valeur propre.

Sur $\mathbb{R}$, tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine, ce qui fait que tout endomorphisme réel en dimension impaire admet au moins une valeur propre, mais on ne peut rien dire de plus (en particulier, sauf en dimension 1, il existe des endomorphismes réels non trigonalisables).

Corollaire 2. *Tout endomorphisme trigonalisable induit sur un s.e.v. stable un endomorphisme trigonalisable.*

Plus généralement, si A est triangulaire par blocs (à blocs diagonaux carrés), alors χ_A est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux, donc A est trigonalisable si, et seulement si, chacun des blocs diagonaux est trigonalisable.

Pour un endomorphisme trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité et son déterminant en est le produit. Le spectre pouvant être vide, cela ne peut pas être vrai en général pour un endomorphisme non trigonalisable :

Proposition 6. *Si f est trigonalisable avec $\chi_f = \displaystyle\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)}(X-\lambda)^{n_\lambda(f)}$, alors*

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} n_\lambda(f)\lambda \text{ et } \det(f) = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \lambda^{n_\lambda(f)}.$$

Exemple 4. Cette propriété est notamment utile pour compléter le spectre quand on connaît déjà beaucoup de vecteurs propres. Par exemple, si $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}\, f = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est donnée par $a_{i,j} = a + b\delta_{i,j}$, alors $\mathrm{rg}(A - bI_n) = 1$, donc $(X - b)^{n-1} | \chi_A$. Il s'ensuit que χ_f est scindé. De plus, la somme des valeurs propres de f est égale à sa trace, qui vaut $n(a+b)$. Ainsi, la dernière racine du polynôme caractéristique est $na + b \neq b$. Finalement, $\dim E_b(f) = n - 1$ et $\dim E_{na+b}(f) = 1$.

3.3. Matrices trigonalisables.

Théorème et définition 2. *La matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si elle vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :*

(i) *l'endomorphisme $\phi_A \colon X \longmapsto AX$ est trigonalisable ;*
(ii) *A est semblable à une matrice triangulaire supérieure ;*
(iii) *A est semblable à une matrice triangulaire inférieure ;*
(iv) *il existe un $\mathbb{K}$-e.v. E de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable, tels que* $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$ *;*
(v) *tout endomorphisme de matrice A est trigonalisable.*

4. Polynômes annulateurs et réduction

4.1. Polynômes d'endomorphismes et valeurs propres.

Proposition 7. *Si f et g sont des endomorphismes du $\mathbb{K}$-e.v. E et P et Q des éléments de $\mathbb{K}[X]$:*

(i) *si $f(x) = \lambda x$, alors $P(f)(x) = P(\lambda)x$;*
(ii) *si $P(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ et si λ est une valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$;*
(iii) *Si $f \circ g = g \circ f$, les espaces propres de f sont stables par $Q(g)$.*

Le premier item de la proposition précédente peut se reformuler comme suit : si λ est valeur propre de f, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(f)$ et $E_\lambda(f) \subset E_{P(\lambda)}(P(f))$. De plus, si f est diagonalisable, alors $P(f)$ est diagonalisable (et ce, dans toute base de vecteurs propres de f).

4.2. Théorème de Cayley-Hamilton (dimension finie).

Théorème 4 (Cayley-Hamilton)**.** *Pour tout E e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_f(f) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.*

Corollaire 3. *Si E est un e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$, alors f est trigonalisable si, et seulement si, f admet un polynôme annulateur scindé.*

4.3. Espaces propres et polynômes interpolateurs de Lagrange.

L'interpolation de Lagrange permet de traiter efficacement les questions de réduction en termes de polynômes annulateurs.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres distinctes de f. Soient $(L_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ les polynômes de Lagrange associés à $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$.

Si $x_j \in E_{\lambda_j}(f)$, alors $L_i(f)(x_j) = L_i(\lambda_j)x_j = \delta_{i,j}x_j$ d'après la proposition 7. Ainsi, si $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 0_E$, alors $L_i(f)(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \delta_{ij}x_j = x_i = 0_E$, ce qui donne une nouvelle preuve du fait que les espaces propres sont en somme directe.

Posons alors $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$ et $F = \operatorname{Ker} P(f)$. Alors, $(X - \lambda_i)L_i$ et P sont proportionnels, ce qui entraîne que

$$\forall x \in F \colon (f - \lambda_i \mathrm{id}_E) \circ L_i(f)(x) = 0_E \quad \therefore \quad L_i(f)(x) \in E_{\lambda_i}(f) \qquad \therefore \qquad x = \mathrm{id}_E(x) = \sum_{i=1}^{p} L_i(f)(x) \in \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f).$$

Ainsi, $F = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$. En particulier, si P est un polynôme annulateur de f, alors $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$. Ce résultat, valable en dimension quelconque, est la partie délicate du théorème suivant :

Théorème 5. *Soient E un e.v. de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'endomorphisme f est diagonalisable ;*
(ii) *il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples ;*
(iii) $\displaystyle\bigcirc_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Les théorèmes 4 et 5 s'étendent immédiatement aux matrices : $\chi_A(A) = 0$ (Cayley-Hamilton) et A est diagonalisable ssi $P(A) = 0$ avec P scindé à racines simples, ssi $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (A - \lambda I_n) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{K})}$. Le théorème 5 se reformule en dimension infinie avec les équivalences ci-dessous :

(*i*) Il existe un ensemble fini Λ de valeurs propres de f tel que $E = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda(f)$;

(*ii*) il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples ;

(*iii*) $\bigcirc_{\lambda\in\Lambda} (f - \lambda \mathrm{id}_E) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Corollaire 4. *Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable et si F est un s.e.v. de E stable par f, alors l'endomorphisme induit par f sur F est diagonalisable.*

Exemple 5. Les *projecteurs* sont les endomorphismes ayant $X^2 - X = X(X-1)$ comme polynôme annulateur. Corrélativement, ils sont diagonalisables et, pour un projecteur p, on a $E = E_1(p) \oplus E_0(p)$ (la décomposition s'étend à la dimension infinie). Ainsi, p est le projecteur sur $E_1(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $E_0(p) = \mathrm{Ker}(p)$.

Les *symétries* sont les endomorphismes ayant $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ comme polynôme annulateur (autrement dit, elles sont leur propre inverse). Elles sont diagonalisables et, pour une symétrie s, on a $E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$ (la décomposition s'étend à la dimension infinie). Ainsi, s est la symétrie par rapport à $E_1(s) = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $E_{-1}(s) = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$. On retrouve comme exemples les décompositions matricielle $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et fonctionnelle $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathcal{P}(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{I}(\mathbb{R})$ (fonctions paires et fonctions impaires).

5. Réduction pratique

5.1. **Recherche d'éléments propres en dimension quelconque.** En dimension infinie, on ne dispose pas du polynôme caractéristique. Si l'on ne dispose pas de polynôme annulateur, on revient donc à la définition et l'on cherche à la fois les vecteurs x et les scalaires λ tels que $f(x) = \lambda x$. Les valeurs propres sont alors les scalaires pour lesquels il existe des x non nuls solution de l'équation.

Exemple 6. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ possédant une limite finie en $+\infty$. Sur E, on pose $T(f)(x) = f(x+1)$. Il est clair que $T \in \mathcal{L}(E)$. Déterminons ses éléments propres. Si $f \in E$ est telle que $T(f) = \lambda f$ et si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, alors

$$\lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+1) = \ell \quad \& \quad \lim_{x\to+\infty} T(f)(x) = \lim_{x\to+\infty} \lambda f(x) = \lambda\ell \qquad \therefore \qquad \ell = \lambda\ell.$$

Si $\ell \neq 0$, alors $\lambda = 1$ et $T(f) = f$ si, et seulement si, f est 1-périodique. Or, une fonction périodique n'admet une limite en l'infini que si elle est constante. Ainsi, 1 est valeur propre de T et l'espace propre $E_1(T)$ est la droite vectorielle formée des fonctions constantes.

Si $\ell = 0$, la relation $T(f) = \lambda f$ donne $f(x_0 + 1) = \lambda f(x_0)$ pour tout $x_0 \geqslant 0$ et, par une récurrence immédiate, $f(x_0 + n) = \lambda^n f(x_0)$. Si f n'est pas la fonction nulle, il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$ et l'on doit avoir $\lim_{n\to\infty} \lambda^n f(x_0) = 0$, soit $-1 < \lambda < 1$. L'ensemble des fonctions f solution sont les fonctions f telles que $f(1) = \lambda f(0)$ et, pour tout $x \in [0,1[$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x+n) = \lambda^n f(x)$, la fonction f étant entièrement déterminée par sa restriction à $[0,1[$. C'est un espace de dimension infinie.

Cette technique (revenir à la définition en cherchant à la fois valeurs et vecteurs propres) peut aussi s'avérer appropriée en dimension finie, notamment pour des endomorphismes de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ou de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$.

Exemple 7. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et $g \in \mathcal{L}(E)$. Soit ϑ l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\vartheta(f) = g \circ f$ (on a clairement $\vartheta \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$). Déterminons ses éléments propres.

$$\forall(\lambda, f) \in \mathbb{K} \times \mathcal{L}(E) \colon \vartheta(f) = \lambda f \iff g \circ f = \lambda f \iff (g - \lambda \mathrm{id}_E) \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}.$$

Si $g - \lambda \mathrm{id}_E$ est inversible, *i.e.* si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(g)$, alors $(g - \lambda \mathrm{id}_E) \circ f = 0 \iff f = 0$, d'où $\mathrm{Sp}(\vartheta) \subset \mathrm{Sp}(g)$. Réciproquement, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$, alors $(g - \lambda \mathrm{id}_E) \circ f = 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g - \lambda \mathrm{id}_E)$. Comme il existe de tels endomorphismes f non nuls, λ est aussi valeur propre de ϑ. De plus, $E_\lambda(\vartheta) \simeq \mathcal{L}(E, E_\lambda(g))$, soit $\dim E_\lambda(\vartheta) = n \dim E_\lambda(g)$. En particulier, $\mathrm{Sp}(g) = \mathrm{Sp}(\vartheta)$. Notons que

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\vartheta)} \dim E_\lambda(\vartheta) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\vartheta)} n \dim E_\lambda(g) = n \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(g)} \dim E_\lambda(g) \qquad \therefore$$

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\vartheta)} \dim E_\lambda(\vartheta) = \dim \mathcal{L}(\mathcal{L}(E)) \iff \sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(g)} \dim E_\lambda(g) = \dim E.$$

Corrélativement, ϑ est diagonalisable si, et seulement si, g l'est.

Exemple 8. Soient $E=\mathbb{R}_4[X]$ et ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$ donné par $\phi(P)=(X^2-1)P'-(4X+1)P$. Notons que la linéarité de ϕ est évidente et que, pour tout polynôme P, $\deg(\phi(P))\leqslant\deg(P)+1$. Comme $\phi(X^4)=-4X^3-X^4\in\mathbb{R}_4[X]$, ϕ est bien un endomorphisme.

Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, $\phi(P)=\lambda P \iff (X^2-1)P'=(4X+1+\lambda)P$. Passons aux fonctions polynomiales et résolvons l'équation différentielle $(x^2-1)y'=(4x+1+\lambda)y$ sur $]1,+\infty[$.

La décomposition en éléments simples donne $\dfrac{4x+1+\lambda}{x^2-1}=\dfrac{5+\lambda}{2(x-1)}+\dfrac{3-\lambda}{2(x+1)}$ et l'équation différentielle s'intègre en

$$y(x)=c\exp\left(\int\frac{5+\lambda}{2(x-1)}\,\mathrm{d}x+\int\frac{3-\lambda}{2(x+1)}\,\mathrm{d}x\right)=c(x-1)^{\frac{5+\lambda}{2}}(x+1)^{\frac{3-\lambda}{2}}.$$

Le choix de l'intervalle $]1,+\infty[$ permet de s'affranchir de valeurs absolues dans les formules d'intégration. Revenons aux vecteurs propres de ϕ. Ce sont les polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ dont la fonction polynomiale associée sur $]1,+\infty[$ est de la forme ci-dessus. Les valeurs propres sont les λ correspondant. Ainsi, il faut déjà que $\dfrac{5+\lambda}{2}$ et $\dfrac{3-\lambda}{2}$ soient des entiers positifs.

On obtient alors un polynôme de degré $\dfrac{5+\lambda}{2}+\dfrac{3-\lambda}{2}=4$, ce qui convient. On voit facilement que les valeurs de λ sont les entiers impairs appartenant à $[\![-5,3]\!]$, soit $\{-5,-3,-1,1,3\}$. Les espaces propres associés sont des droites vectorielles et, comme $\#\operatorname{Sp}(\phi)=\dim\mathbb{R}_4[X]$, ϕ est diagonalisable.

5.2. **Diagonalisation effective.** En dimension finie, pour réduire un endomorphisme, on peut ou bien écrire sa matrice dans une base et réduire la matrice, ou bien chercher directement ses éléments propres comme on le fait en dimension infinie. Diagonaliser une matrice, c'est trouver ses valeurs propres, ses espaces propres et vérifier qu'elle est diagonalisable, par exemple en notant que la somme des dimensions de ses espaces propres est égale à la taille de la matrice. Si la matrice est symétrique réelle, on sait sans calcul qu'elle est diagonalisable, mais l'on n'en déduit pas sans calcul ses éléments propres. Toutefois, une fois son polynôme caractéristique calculé et factorisé, on connaît *a priori* la dimension des espaces propres (égaux à la multiplicité de la valeur propre), ce qui peut faciliter les calculs.

Par définition, $A=\operatorname{mat}_{\text{can}}(\phi_A)$; si P est une matrice inversible, alors les formules de changement de base donnent $\operatorname{mat}_{(C_1(P),\dots,C_n(P))}(\phi_A)=P^{-1}AP$. *In fine*, on a $A=PDP^{-1}$ avec $D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $AC_j(P)=\lambda_jC_j(P)$. On ne calcule pas P^{-1}, sauf si cela est utile, par exemple pour calculer A^n (ou demandé par l'énoncé...) Parfois, il faut simplement vérifier que la matrice est diagonalisable, ce qui ne va pas toujours plus vite.

L'interprétation d'une matrice carrée comme l'endomophisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé permet de lire facilement sur la matrice quelques informations.

— Si la matrice est triangulaire, ses valeurs propres figurent sur la diagonale avec leur ordre de multiplicité, égal au nombre d'occurrences de la valeur propre sur la diagonale. On obtient son polynôme caractéristique sans calcul.

— Le vecteur de la base canonique e_j est propre si, et seulement si, $C_j(A)$ est nulle, sauf éventuellement le coefficient $a_{j,j}$, lequel est alors la valeur propre correspondante.

— Si la matrice est symétrique réelle, elle est diagonalisable. On n'en connaît *a priori* ni les valeurs propres, ni les espaces propres, sauf si elle est diagonale.

— En général, on calcule χ_A et on le factorise. Cela donne $\operatorname{Sp}(A)$.

— On cherche ensuite les espaces propres et l'on en déduit si la matrice est diagonalisable. Dans la mesure où l'on connaît déjà les valeurs propres, on ne résout **que** des systèmes non inversibles. Si l'on trouve $0_{\mathbb{K}^n}$ comme seul vecteur propre, c'est qu'il y a une erreur !

— Si l'on ne veut que montrer le caractère diagonalisable, la dimension des espaces propres suffit ; elle peut être obtenue par application du théorème du rang à $A-\lambda I_n$ sans résolution complète du système. Si $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distinctes, alors, A est diagonalisable et les espaces propres sont de dimension 1 (même si on ne les connaît pas ou pas encore).

— Le polynôme caractéristique est souvent calculé par des opérations élémentaires sur xI_n-A. Les opérations sur les lignes reviennent à multiplier xI_n-A *à gauche* par des matrices inversibles. Elles conservent donc non seulement le rang, mais aussi le noyau. Tant que l'on n'a effectué que des opérations élémentaires sur les lignes, on peut donc utiliser ces matrices modifiées pour chercher les espaces propres ; cela accélère le calcul d'autant.

— Si l'on dispose d'une famille libre de $n-1$ vecteurs propres d'une matrice, elle est trigonalisable et l'on obtient la dernière valeur propre en utilisant la trace ; on peut alors conclure. En particulier, si $\operatorname{rg}(f)=1$, f est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{tr}(f)\neq 0_{\mathbb{K}}$.

— Il arrive que certains vecteurs propres soient évidents. Ainsi, si la somme des éléments de chaque ligne est indépendante de la ligne (matrices stochastiques par exemple), alors $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ est vecteur propre, et la valeur propre correspondante est la somme des éléments d'une ligne.

— Parfois, c'est la transposée qui a les propriétés les plus visibles et l'on peut utiliser $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$. Plus généralement, on a $\chi_A = \chi_{A^\top}$, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A^\top)$ et A est diagonalisable, si, et seulement si, $A^\top$ l'est, mais les espaces propres de A et de $A^\top$ sont différents.

Exemple 9. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On remarque à partir de la deuxième colonne que $Ae_2 = 3e_2$. On note aussi que $C_1(A) = C_3(A)$, donc A n'est pas inversible et 0 est valeur propre. La relation $C_1(A) = C_3(A)$ donne aussi le fait que $e_1 - e_3 \in \operatorname{Ker} A$. La matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable. On trouve la dernière valeur propre, α, à partir de la relation $\operatorname{tr}(A) = 5 = 3 + 0 + \alpha$, soit $\alpha = 2$.

Si l'on ne voit pas tout de suite l'espace propre associé, on calcule $B = A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et la relation $C_1(B) + C_3(B) = 0$ donne $e_1 + e_3 \in E_2(A)$. Il y a ainsi trois valeurs propres, donc les espaces propres sont des droites vectorielles ; on a donc tous les vecteurs propres : $E_3(A) = \mathrm{Vect}(e_2)$, $E_0(A) = \mathrm{Vect}(e_1 - e_3)$ et $E_2(A) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_3)$.

Exemple 10. Soit $a \in \mathbb{K}$. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \colon \Lambda(P) = (X - a)(P' - P'(a)) - 2(P - P(a)).$$

On peut passer par la matrice. Il semble naturel de l'écrire dans la base $\mathcal{B} = \big((X-a)^k\big)_{0 \leqslant k \leqslant n}$. Pour $P_k = (X - a)^k$, on a $P_k(a) = \delta_{k,0}$ et $P_k'(a) = \delta_{k,1}$. En reportant dans l'expression de $\Lambda(P)$, on en déduit $\Lambda(P_0) = 0$, $\Lambda(P_1) = -2(X - a)$ et $\Lambda\big(P_k\big) = (k-2)(X-a)^k$ si $k \in [\![2, n]\!]$. Ainsi, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(\Lambda) = \mathrm{diag}(0, -2, 0, 1, 2, \ldots, n-2)$, ce qui donne le spectre et les espaces propres de Λ, soit $E_0(\Lambda) = \mathrm{Vect}\,\big(P_0, P_2\big)$, $E_{-2}(\Lambda) = \mathrm{Vect}(P_1)$ et, pour $\lambda \in [\![1, n-2]\!]$, $E_\lambda(\Lambda) = \mathrm{Vect}\,\big(P_{k+2}\big)$.

Exemple 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. On calcule

$$\chi_A = \begin{vmatrix} x-1 & -3 & 0 \\ -3 & x+2 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x+2 & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2+x-12) = (x-1)(x-3)(x+4).$$

À ce stade, on sait que A est diagonalisable. La recherche des espaces propres s'effectue sans astuce particulière :

$$E_1(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ E_3(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$E_{-4}(A) = \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} -5 & -3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.3. **Trigonalisation effective.** La trigonalisation commence par la recherche des valeurs, puis des espaces propres. Il faut alors compléter la famille libre maximale de vecteurs propres de manière à conserver le caractère triangulaire. L'approche pratique de la trigonalisation effective est hors programme en général. Le cas le plus compliqué que l'on puisse avoir à traiter sans indication est le suivant.

Exemple 12. Vérifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$ est trigonalisable, non diagonalisable et la trigonaliser.

On calcule $\chi_A = X^3 - 9X^2 + 27X - 27 = (X-3)^3$. On sait alors déjà que A n'est pas diagonalisable car, avec une unique valeur propre, elle serait alors semblable à $3I_3$. Or, une homothétie a la même matrice dans toute base et $A \neq 3I_3$. On calcule alors $E_3(A)$, qui est une droite vectorielle, engendrée par $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}^\top$. Notons P la matrice de passage à la matrice triangulaire supérieure T.

On a ainsi $A = PTP^{-1}$, ou, de manière équivalente, $T = P^{-1}AP$. Comme on lit les valeurs propres d'une matrice triangulaire sur sa diagonale, on a, dans l'état actuel des calculs, et en notant par des points ou des constantes les coefficients à trouver, $P = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ -3 & \cdot & \cdot \\ -2 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 3 & \cdot \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On peut raisonner sur l'endomorphisme ϕ_A canoniquement associé à A. Introduisons $B = A - 3I_3$. Alors $\phi_B = \phi_A - 3\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. La deuxième colonne de T indique que

$$\phi_A(C_2(P)) - 3C_2(P) \in \mathrm{Vect}(C_1(P)) \iff \phi_B(C_2(P)) \in \operatorname{Ker}(\phi_B) \iff C_2(P) \in \operatorname{Ker}\big((\phi_B)^2\big).$$

On calcule donc $B^2 = 3\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -3 & -3 & 3\\ -2 & -2 & 2\end{pmatrix}$ et l'on prend pour $C_2(P)$ n'importe quel élément de son noyau non colinéaire à $C_1(P)$. Comme $\mathrm{Ker}(B^2)$ est le plan d'équation $x+y-z=0$ on prend (par exemple, il n'y a jamais unicité du choix) $C_2(P) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$. On calcule alors

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 6\\ 1 & -3 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix} \qquad \therefore \qquad P = \begin{pmatrix}1 & 1 & \cdot\\ -3 & 0 & \cdot\\ -2 & 1 & \cdot\end{pmatrix} \ \&\ T = \begin{pmatrix}3 & -3 & \cdot\\ 0 & 3 & \cdot\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Le choix de $C_3(P)$ est arbitraire. En effet, les deux premiers coefficients de $C_3(T)$ peuvent prendre n'importe quelle valeur et l'on est sûr que le dernier coefficient sera toujours 3. On prend donc un vecteur le plus simple possible pour compléter $\big(C_1(P), C_2(P)\big)$ en une base de $\mathbb{R}^3$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut toujours prendre un vecteur de la base canonique. Prenons ici $C_3(P) = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$. On a $\phi_A(C_3(P)) = C_2(A) = bC_1(P) + cC_2(P)$

$$\phi_A(C_3(P)) = C_2(A) = bC_1(P) + cC_2(P) \iff \begin{cases} b+c=0\\ -3b+3=0\\ -2b+c=-3\end{cases} \qquad \therefore \qquad P = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 6\\ 1 & -3 & 8\end{pmatrix} \ \&\ T = \begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Autant il y a unicité de la matrice diagonale issue de la diagonalisation à l'ordre des valeurs propres près, autant il n'y a pas du tout unicité de la matrice triangulaire supérieure issue d'une trigonalisation. En fait, la trigonalisation n'est qu'une version très fruste d'un résultat fondamental, mais totalement hors programme, la *réduction de Jordan* :

Théorème 6 (HP)**.** *Toute matrice complexe est semblable à une matrice diagonale par blocs de la forme* $J_p = I_p + \lambda\displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} E_{i,i+1}$.

Certains exercices peuvent demander de réaliser une telle réduction, à condition de fournir la forme attendue. La réduction de Jordan générale est abordée dans certains problèmes de concours, mais elle n'est pas à connaître.

Exemple 13. Reprenons l'exemple 12 et montrons que la matrice $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & 0 & 6\\ 1 & -3 & 8\end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$. On conserve les notations de l'exemple 12.

La première colonne de la matrice de passage P ne change pas : c'est un vecteur propre de ϕ_A. Par contre, on ne peut plus *a priori* choisir indépendamment $C_2(P)$ et $C_3(P)$. Les deux conditions à satisfaire sont

$$\phi_B\big(C_2(P)\big) = C_1(P) \quad \& \quad \phi_B\big(C_3(P)\big) = C_2(P).$$

Ainsi, on pourra trouver $C_3(P)$ si l'on a, cela montrant que, pour $C_2(P) \in \mathrm{Im}(\phi_B) \cap \phi_B^{-1}\big(C_1(P)\big)$. Notons que $B = A - 3I_3$ est nilpotente d'indice 3, donc que $\mathrm{Im}(\phi_B) \subset \mathrm{Ker}(\phi_B^2)$. Comme on a vu que $\mathrm{rg}(B) = 2$ et $\mathrm{rg}(B^2) = 1$, on a $\mathrm{Im}(\phi_B) = \mathrm{Ker}(\phi_B^2)$ par dimension. On calcule

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\phi_B^2) \cap \phi_B^{-1}\big(C_1(P)\big) \iff \begin{cases} x+y-z=0\\ -2x-z=1\\ 3x-3y+6z=-3\\ x-3y+5z=-2\end{cases} \iff \begin{cases} x+y=z\\ 3x+y=-1\end{cases} \qquad \therefore \qquad C_2(P) = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \text{ par ex., puis}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \phi_B^{-1}\big(C_2(P)\big) \iff \begin{cases} -2x-z=-1\\ 3x-3y+6z=2\\ x-3y+5z=1\end{cases} \iff \begin{cases} x-3y=-5z+1\\ 6y=9z-1\end{cases} \qquad \therefore \qquad C_3(P) = \begin{pmatrix}1/2\\-1/6\\0\end{pmatrix} \text{ par ex.}$$

5.4. **Autres réductions.** D'autres réductions peuvent apparaître en exercice, mais elles ne sont pas au programme et donc, pas à connaître.

Exemple 14. Soient E un $\mathbb{R}$-e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$. Ainsi, X^2+1 est polynôme annulateur de f, qui est donc à spectre vide, ce qui entraîne que E est de dimension paire (on peut aussi écrire $\det(f^2) = \det(f)^2 = \det(-\mathrm{id}_E) = (-1)^{\dim E}$).

Soit e_1 un vecteur non nul de E. Posons $e_2 = f(e_1)$. Alors la famille (e_1, e_2) est libre car e_1 serait sinon un vecteur propre de f, qui, on l'a vu, n'en a pas. Si $\dim E = 2$, on a $\mathrm{mat}_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = A$. Montrons par récurrence qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\mathrm{Diag}(A, \ldots, A)$.

On a construit deux vecteurs (e_1, e_2) tels que $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ forme un plan stable par f, sur lequel f induit un endomorphisme de matrice A dans la base (e_1, e_2). Supposons par récurrence sur k avoir construit une famille libre $(e_1, e_2, \ldots, e_{2k})$ engendrant un sous-espace F_k de E stable par f et que la matrice de l'endomorphisme induit par f sur F_k ait pour matrice $\mathrm{Diag}(A, \ldots, A)$ avec k blocs diagonaux égaux à A. Si $F_k = E$, on a terminé la construction. Sinon, soient $e_{2k+1} \in E \setminus F_k$ et $e_{2k+2} = f(e_{2k+1})$. Le raisonnement fait sur (e_1, e_2) montre que $P = \mathrm{Vect}(e_{2k+1}, e_{2k})$ est un plan stable par f sur lequel l'endomorphisme induit a pour matrice A dans la base (e_{2k+1}, e_{2k}). Alors, $G = P \cap F_k$ est stable par f comme intersection de sous-espaces stables. De plus, $G \neq P$ car $e_{2k+1} \in P \setminus F_k$, donc $\dim G \leqslant 1$ et $\dim G \neq 1$ car G serait sinon une droite stable, donc propre, ce qui est exclu puisque f est à spectre vide. Donc $G = \{0_E\}$ et l'on a construit une famille libre $(e_1, \ldots, e_{2k+2})$ répondant au cahier des charges, ce qui termine la récurrence.

6. Applications et compléments

6.1. Matrices par blocs.

Proposition 8. ***1.*** *Une matrice diagonale par blocs est diagonalisable si, et seulement si, tous ses blocs diagonaux sont diagonalisables.*
2. *Une matrice triangulaire par blocs est trigonalisable si, et seulement si, tous ses blocs diagonaux sont trigonalisables.*

Matriciellement, si $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la somme directe, $A = \mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_m)$ est diagonale par blocs avec A_k matrice de l'endomorphisme induit par f sur F_k dans la partie de la base correspondante. Si les matrices A_k sont diagonalisables et si $A_k = P_k D_k P_k^{-1}$ avec les matrices D_k diagonales, alors $A = PDP^{-1}$ avec $P = \mathrm{Diag}(P_1, \ldots, P_m)$, $D = \mathrm{Diag}(D_1, \ldots, D_m)$ (qui est donc diagonale) et $P^{-1} = \mathrm{Diag}\left(P_1^{-1}, \ldots, P_m^{-1}\right)$.
En termes d'endomorphismes : si $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m$ et si F_i est stable par $f \in \mathcal{L}(E)$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, alors f est diagonalisable si, et seulement si, $f_{\| F_i}$ est diagonalisable pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.

6.2. Calcul de puissances n-ièmes.

On a vu dans le paragraphe sur les polynômes de matrices que si $B = P^{-1}AP$, alors $B^m = P^{-1}A^mP$ pour tout entier positif en général. Cela s'étend à tout entier relatif si A est inversible. Il s'ensuit que, pour calculer A^m, il suffit d'élever à la puissance m une matrice semblable à A — évidemment, cela n'a aucun intérêt pour calculer A^2 ou A^3, et l'on parle ici de trouver une expression explicite de A^m valable pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Le cas le plus simple est celui où B est diagonale car $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^m = \mathrm{diag}(\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m)$. Si B est triangulaire, on ne sait pas vraiment faire, mais on peut le faire si $B = D + N$ où D est diagonalisable, N nilpotente et $DN = ND$. Une telle décomposition existe toujours si B est trigonalisable (c'est la décomposition de Dunford, hors programme). Le cas diagonal correspondant à l'existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples P_0, rappelons qu'il se traite aussi de façon purement polynomiale en calculant le reste de la division euclidienne de X^n par P_0 : $X^n = QP_0 + R \Longrightarrow B^n = R(B)$.

En pratique, on pourra utiliser le binôme de Newton sans se poser de questions si $A = \lambda I_p + N$ avec $N \in \mathcal{T}_p^{++}(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_p^{--}(\mathbb{K})$ et si $N^p = 0$. Cela s'étend à une décomposition par blocs : si A est diagonale par blocs avec des blocs triangulaires de la forme ci-dessus, on peut aussi appliquer la formule du binôme. Retenir : la formule du binôme s'applique quand les matrices commutent.

6.3. Commutation et coréduction.

On a vu dans le chapitre précédent que, si f et g sont des endomorphismes de E qui commutent (*i.e.* $f \circ g = g \circ f$), et si P et Q sont des polynômes, alors $P(f) \circ Q(g) = Q(g) \circ P(f)$. Corrélativement, $\mathrm{Ker}(P(f))$ est stable par $Q(g)$; en particulier, les espaces propres de f sont stables par g. Cela permet, dans certains cas, de « coréduire » f et g, c'est-à-dire de trouver une base de diagonalisation (ou de trigonalisation) commune à f et à g.

Exemple 15. Si $\#\,\mathrm{Sp}(f) = \dim E$ et si $f \circ g = g \circ f$, alors f et g sont codiagonalisables. En effet, f l'est du fait qu'il possède $\dim E$ valeurs propres distinctes. De plus, les espaces propres de f sont des droites stables par g, donc des droites propres pour g, ce qui montre que les bases de diagonalisation de f diagonalisent aussi g.

Exemple 16. Si f et g sont deux endomorphismes diagonalisables de E tels que $f \circ g = g \circ f$, alors f et g sont codiagonalisables. En effet, E est la somme directe des espaces propres de f. Les espaces $E_\lambda(f)$ sont stables par g et comme g est diagonalisable, g induit sur $E_\lambda(f)$ un endomorphisme diagonalisable. Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, il existe donc une base de $E_\lambda(f)$ formée de vecteurs propres de g. Par concaténation de ces bases, on obtient une base de codiagonalisation de f et de g.

6.4. **Endomorphismes et matrices nilpotents.** Les endomorphismes *nilpotents* sont, par définition, ceux ayant un polynôme annulateur de la forme X^m. Ce sont les endomorphismes trigonalisables u tels que $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$ (on a $\chi_u = X^n$) et les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotentes sont celles semblables à une matrice de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$. En particulier, les matrices nilpotentes *complexes* sont celles dont le spectre est réduit à $\{0\}$. La matrice nulle mise à part, elles ne sont jamais diagonalisables.

6.5. **Complément sur les matrices semblables.** On a vu que deux matrices semblables ont même trace et même déterminant. Plus généralement, si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$ et, pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$. Réciproquement, deux matrices ayant le même polynôme caractéristique ne sont pas semblables en général, même si les dimensions des espaces propres sont identiques. Toutefois :

Proposition 9. *Soient A et B telles que $\chi_A = \chi_B$ et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$, $\dim E_\lambda(A) = \dim E_\lambda(B)$. Si A est diagonalisable, alors B l'est également et A et B sont semblables.*

La démonstration est immédiate car A et B sont alors semblables à une même matrice diagonale.

6.6. **Suites linéaires récurrentes.** Soit $(a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^n$ avec $a_0 \neq 0$. On considère

$$\mathcal{U} = \left\{u = (u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{K}^n \,;\ \forall n \in \mathbb{N}\colon u_{n+p} = a_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n\right\}.$$

L'application $u \longmapsto (u_0, \ldots, u_{p-1})$ réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{U}$ sur $\mathbb{K}^p$ et, si l'on pose $U_n = \begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+p-1}\end{pmatrix}^\mathsf{T}$, il existe une matrice A telle que $U_{n+1} = AU_n$ et A^T est une matrice compagnon de polynôme caractéristique $\chi_A = X^p - a_{p-1}X^{p-1} - \cdots - a_1 X - a_0$. On a alors $U_n = A^n U_0$. On en déduit en particulier que, si P est scindé à racines simples, une base de $\mathcal{U}$ est formée des suites $(\lambda^n)_{n\geqslant 0}$ pour $P(\lambda) = 0$.

Plus généralement, on démontre (programme MP) que si $\chi_A = \prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}^{p} (X-\lambda)^{n_\lambda(A)}$, une base de $\mathcal{U}$ est donnée par

$$\left\{(n^k\lambda^n)_{n\geqslant 0} \,;\ k \in [\![0, n_\lambda(A)-1]\!],\ \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\right\}.$$

6.7. **Projecteurs et symétries, définitions géométrique et algébrique.**

Définition 6. *1) Si $E = F \oplus G$, tout vecteur $x \in E$ se décompose en une somme $y + z$ avec $(y,z) \in F \times G$. Alors, par définition, la projection sur F parallèlement à G est définie par $p_{F/\!/G}(x) = y$ et la symétrie par rapport à F parallèlement à G est définie par $s_{F/\!/G}(x) = y - z$.*
2) Un projecteur d'un espace vectoriel E est un élément $p \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme $X^2 - X$ est annulateur. Une symétrie est un élément $s \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur.

Ces deux définitions, géométrique et algébrique, décrivent les mêmes objets. Il est facile de vérifier que

$$p_{F/\!/G} \circ p_{F/\!/G} = p_{F/\!/G} \quad\text{et}\quad s_{F/\!/G} \circ s_{F/\!/G} = \mathrm{id}_E.$$

Réciproquement, si p est un projecteur et s, une symétrie, alors

$$p = p_{\mathrm{Ker}(p-\mathrm{id}_E)/\!/\,\mathrm{Ker}(p)} = p_{\mathrm{Im}(p)/\!/\,\mathrm{Ker}(p)} \quad\text{et}\quad s = p_{\mathrm{Ker}(s-\mathrm{id}_E)/\!/\,\mathrm{Ker}(s+\mathrm{id}_E)}.$$

Exemple 17. La transposition T est une symétrie sur $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$: elle est linéaire et vérifie $A^{\mathsf{T}\mathsf{T}} = A$ pour toute matrice A. Il s'ensuit que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(T - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(T + \mathrm{id}_E) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Notons que c'est même une somme directe orthogonale par rapport au produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ car, pour $(A,S) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

$$\langle A, S\rangle = \mathrm{tr}(A^\mathsf{T} S) = \mathrm{tr}(-AS) = -\mathrm{tr}(AS) = -\mathrm{tr}(SA) = -\mathrm{tr}(S^\mathsf{T} A) = -\langle S, A\rangle,$$

d'où $\langle A, S\rangle = 0$ par symétrie du produit scalaire.

6.8. **Systèmes différentiels linéaires.** On en parlera dans un chapitre sur les équations différentielles.