

DM 2 - PSI* - 2025-2026 - Corrigé

Mines PSI 2016

A. Exemples

1. On calcule $\chi_D = \begin{vmatrix} X & 1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 + 1$, qui n'a pas de racine réelle, donc D est quasi-nilpotente en tant qu'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. En revanche, $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(D) = \{-i, i\}$, donc D n'est pas quasi-nilpotente en tant qu'élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

On calcule $\chi_B = \begin{vmatrix} X-1 & -i \\ -i & X+1 \end{vmatrix} = X^2$, donc $\text{Sp}(B) = \{0\}$ et B est bien quasi-nilpotente (et donc nilpotente tout court). Alternativement, on peut calculer $B^2 = 0$, ce qui montre que B est nilpotente, donc quasi-nilpotente. On peut noter que la matrice B donne un exemple de matrice symétrique non diagonalisable ; cela sera utile à la question 7.

2. Cette question est dans l'adhérence du cours. D'après le rapport du jury, celui-ci attendait une solution complète et formelle. Notons $T: A \mapsto A^T$ l'application de transposition, laquelle définit un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = E_1(T)$ (espace propre associé à la valeur propre 1) et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = E_{-1}(T)$. Enfin,

$$\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) = \text{Vect}(E_{i,j}; 1 \leq i < j \leq n) \quad \therefore \quad \dim \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K}) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

et l'on obtient bien ainsi des s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour calculer la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, montrons que $\{E_{i,i} \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{E_{i,j} + E_{j,i} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$ est une famille libre et génératrice (non ordonnée) de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Si $S = (s_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, alors

$$S = \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{i,j} E_{i,j} = \sum_{1 \leq i \leq n} s_{i,i} E_{i,i} + \sum_{1 \leq i,j \leq n} s_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i}).$$

La famille considérée est bien génératrice et il est clair que la décomposition, partant de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est unique. Aussi a-t-on $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Enfin, T étant une symétrie, on a $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = E_1(T) \oplus E_{-1}(T)$, donc $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) - \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \frac{n(n-1)}{2}$.

3. Les matrices de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{K})$ sont triangulaires, donc leur spectre se lit sur leur diagonale, qui est constituée de 0. Leur spectre vaut donc toujours $\{0\}$, ce qui en fait des matrices quasi-nilpotentes (nilpotentes tout court, en fait).

4. Pour $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, on note que $X^T A X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_1(\mathbb{R})$, d'où

$$X^T A X = (X^T A X)^T = X^T A^T X^{TT} = -X^T A X \quad \therefore \quad X^T A X = 0.$$

Cette écriture est classique quand on a étudié les endomorphismes des espaces euclidiens. Sinon, on peut alternativement écrire (formule du produit (dominos)) :

$$X^T A X = \sum_{1 \leq i,j \leq n} x_i a_{i,j} x_j = \sum_{1 \leq i \leq n} a_{i,i} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i,j} + a_{j,i}) x_i x_j = 0 + 0 = 0.$$

Si $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$, il vient par ailleurs

$$0 = X^T A X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^2 = \lambda \|X\|_2^2.$$

Comme $X \neq 0$, $\|X\|_2 \neq 0$, donc $\lambda = 0$. Ainsi, $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$, donc A est quasi-nilpotente en tant que matrice réelle (l'exemple de la matrice D de la question 1 montre que ce n'est pas vrai si l'on considère A comme une matrice complexe). Par définition, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est donc quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Si $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{PMP^{-1} \mid M \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})\}$ pour une certaine matrice P , il s'ensuit que toute matrice antisymétrique est semblable à une matrice nilpotente, donc est elle-même nilpotente. La matrice D montre que c'est faux pour

$n = 2$ car $D^2 = -I_2$, soit $D^{4m} = I_n \neq 0$. En dimension n , la matrice diagonale par blocs $D' = \left(\begin{array}{c|c} D & 0 \\ \hline 0 & 0_{\mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})} \end{array} \right)$ donne un contreexemple, car elle n'est pas nilpotente, vu que $D'^{4m} = \text{diag}(1, 1, 0, \dots, 0)$.

6. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors elle admet un polynôme annulateur de la forme X^p , donc $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$ et A est donc quasi-nilpotente.

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\text{Sp}(A) \neq \emptyset$, donc A est quasi-nilpotente ssi $\text{Sp}(A) = \{0\}$ ssi A est nilpotente ssi $\chi_A = X^n$.

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, A est quasi-nilpotente ssi $\text{Sp}(A) \subset \{0\}$ ssi $\chi_A = QX^p$ avec Q produit de polynômes unitaires de degré 2 à discriminant strictement négatif et $0 \leq p \leq n$, le cas $p = n$ et $Q = 1$ correspondant à A nilpotent.

B. Cas réel

7. Si $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors S est diagonalisable et n'est donc quasi-nilpotente que si $S = 0$. Le résultat est faux sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ comme le montre la matrice B de la question 2 en dimension 2. De même qu'à la question précédente, le contreexemple s'étend immédiatement à la dimension n en considérant la matrice par blocs $B' = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & 0_{\mathcal{M}_{n-2}(\mathbb{R})} \end{array} \right)$.

8. Soit V un s.e.v. de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quasi-nilpotent dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après la question 7, il est en somme directe avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, donc $\dim V + \dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \leq \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = n^2$, soit $\dim V \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Le cas $V = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et la question 5 montrent que la majoration est optimale.

C. Lemme des colonnes

Il faut relire un certain nombre de fois l'énoncé du *lemmes des colonnes* pour le comprendre... Comme l'énoncé s'est approprié la notation habituelle C_j , on introduit $\text{Col}_j(A)$ pour la j ème colonne de la matrice A . Ainsi, pour un s.e.v. V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit $C_j(V) = \{M \in V ; \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\} : \text{Col}_i(M) = 0\}$. Le lemme des colonnes affirme que, pour tout sev V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ quasi-nilpotent, il existe un indice j tel que V ne contienne aucune matrice dont seule la j ème colonne serait non nulle. Comme on raisonne par l'absurde, on suppose donc à partir de la dixième question que, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, V contient une matrice M dont $\text{Col}_j(M)$ est la seule colonne non nulle.

9. Si $n = 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de dimension 1 et la matrice nulle est la seule matrice quasi-nilpotente, donc $V = \{0\}$. On prend $j = 1$ et il est alors vrai que V ne contient aucune matrice dont la première colonne (ici, l'unique coefficient) serait non nulle. C'est évidemment une trivialité, mais il faut bien initialiser la récurrence (et le rapport précise que cette question idiote n'a pas été aussi bien réussie que cela).

10. L'ensemble V' contient la matrice $0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, donc $K(V')$ contient $0_{\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})}$. De plus, V' est un s.e.v. comme intersection de deux s.e.v. (V et l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont la dernière colonne est nulle) et K est linéaire, donc $K(V')$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$. Enfin, toute matrice $M \in V'$ est triangulaire inférieure par blocs, donc $\chi_M = X\chi_{K(M)}$, d'où $\text{Sp}(K(M)) \subset \text{Sp}(M) \subset \{0\}$, donc $K(M)$ est quasi-nilpotente.

11. Appliquons l'hypothèse de récurrence à $K(V')$: il existe $j_0 \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $C_{j_0}(K(V')) = \{0\}$. L'hypothèse sur V assure que $C_{j_0}(V) \neq \{0\}$. Cela signifie que V contient une matrice non nulle M dont toutes les colonnes sont nulles, sauf la j_0 -ème. Comme $j_0 \leq n-1$, $\text{Col}_n(M) = 0$, donc $M \in V'$. Enfin, $C_{j_0}(K(V')) = \{0\}$ assure que $\text{Col}_{j_0}(K(M)) = 0$, puisque $\text{Col}_j(K(M)) = 0$ pour tout $j \neq j_0$. Il s'ensuit que le seul coefficient non nul de M se trouve en position (n, j_0) , donc que M est multiple de E_{n, j_0} . Comme V' est un espace vectoriel, $E_{n, j_0} \in V$.

12. Soit $(\sigma, \sigma') \in \mathfrak{S}_n^2$. Alors,

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket : u_\sigma \circ u_{\sigma'}(e_j) = u_\sigma(u_{\sigma'}(e_j)) = u_\sigma(e_{\sigma'(j)}) = e_{\sigma(\sigma'(j))} \quad \therefore \quad u_\sigma \circ u_{\sigma'} = u_{\sigma \circ \sigma'}.$$

En particulier, $u_\sigma \circ u_{\sigma^{-1}} = u_{\text{id}} = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$. Comme $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie, u_σ est inversible et $u_\sigma^{-1} = u_{\sigma^{-1}}$.

13. Soit $Q_\sigma = (q_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de u_σ dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Par définition, $\text{Col}_j(Q_\sigma)$ est le vecteur des coordonnées de $u_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$ dans la base canonique, ce qui donne $q_{i,j} = \delta_{i, \sigma(j)}$ pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Ainsi, $Q_\sigma = P_\sigma$. La question 12 montre alors que P_σ est inversible et que $P_\sigma^{-1} = P_{\sigma^{-1}}$, d'où $[P_\sigma^{-1}]_{i,j} = \delta_{i, \sigma^{-1}(j)} = \delta_{\sigma(i), j}$. Autrement dit, $P_\sigma^{-1} = P_\sigma^\top$, ce qu'on aurait pu voir tout de suite car les matrices P_σ sont orthogonales.

14. Par définition, P_σ est la matrice de changement de base de $(e_1, \dots, e_n)$ à $(\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_n))$. La formule de changement de base entraîne que si $M = \text{mat}_{(e_1, \dots, e_n)}(f)$, alors $P_\sigma^{-1}MP_\sigma = \text{mat}_{(\sigma(e_1), \dots, \sigma(e_n))}(f)$.

Ainsi, si $P_\sigma^{-1}MP_\sigma = (n_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $M = (m_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, alors $n_{i,j} = m_{\sigma(i), \sigma(j)}$. Cela peut aussi se retrouver en effectuant le produit matriciel :

$$n_{i,j} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq \ell \leq n}} \delta_{\sigma(i), k} m_{k, \ell} \delta_{\ell, \sigma(j)} = m_{\sigma(i), \sigma(j)}.$$

15. L'application $M \mapsto P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ est linéaire et V est un espace vectoriel, donc V^σ est l'image d'un e.v. par une application linéaire, donc un e.v. De plus, $\text{Sp}(P_\sigma^{-1}MP_\sigma) = \text{Sp}(M)$ et M est quasi-nilpotente, donc $P_\sigma^{-1}MP_\sigma$ également.

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Par hypothèse, $C_{\sigma(j)}(V) \neq \{0\}$. Il existe donc $M \in V \setminus \{0\}$ telle que $\text{Col}_{\sigma(k)}(M) = 0$ pour tout $k \neq \sigma(j)$. Or, les coefficients de $\text{Col}_{\sigma(k)}(M)$ sont, d'après la question 14, une permutation de ceux de $\text{Col}_k(P_\sigma^{-1}MP_\sigma)$. Ainsi, $\text{Col}_k(P_\sigma^{-1}MP_\sigma) = 0$ pour tout k , sauf pour $k = j$, soit $C_j(V^\sigma) \neq \{0\}$.

16. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $j = n$, la question 11 donne l'existence de $f(n) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ (ce $f(n)$ est le j de la question 11) tel que $E_{n, f(n)} \in V$. Si $j \neq n$, considérons la transposition σ qui échange n et j et laisse les autres entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ invariants. D'après la question 15, on peut appliquer la question 11 à V^σ , d'où l'existence de k tel que $E_{n, k} \in V^\sigma$. Alors, $P_\sigma E_{n, k} P_\sigma^{-1} = E_{\sigma(n), \sigma(k)} = E_{j, \sigma(k)} \in V$. On pose $f(j) = \sigma(k)$.

17. Soit la suite $(f^m(1))_{m \geq 0}$, où l'exposant de f est lié à la composition des applications. Cette suite est à valeurs dans l'ensemble fini $\llbracket 1, n \rrbracket$, donc il existe par le principe des tiroirs deux entiers $m_1 < m_2$ tels que $f^{m_1}(1) = f^{m_2}(1)$. On les choisit tels que $m_2 - m_1$ soit minimal, ce qui entraîne que $\#\{f^m(1) ; m_1 \leq m < m_2\} = m_2 - m_1$. On prend alors $(j_1, j_2, \dots, j_p) = (f^{m_1}(1), f^{m_1+1}(1), \dots, f^{m_2-1}(1))$.

18. On peut au choix écrire un algorithme en pseudo-code ou utiliser Python.

```
def cycle(f):
    etat, L = 1, []
    while etat not in L:
        L.append(etat)
        etat = f(L[-1])
    debut = L.index(etat)
    return L[debut:]
```

19. Commençons par noter que $E_{i,j} (x_1 \ x_1 \ \dots \ x_n)^\top$ est le vecteur colonne dont la composante d'indice ℓ vaut $\delta_{\ell, i} x_j$. Il s'ensuit, en notant $j_{p+1} = j_1$ que $NX|_{j_k} = x_{j_{k+1}}$. Corrélativement, $E_1(N)$ contient la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(\mathbb{1}_J(i))_{1 \leq i \leq n}$, où $J = \{j_1, j_2, \dots, j_p\}$. Or, $N \in V$ car N est une somme d'éléments de V , ce qui contredit la quasi-nilpotence de V et met un point final au raisonnement par l'absurde initié à la question 10.

D. Cas général

20. L'hypothèse $C_n(V) = \{0\}$ se traduit par $\text{Ker}(K) \cap \text{Ker}(L) = \{0\}$. Or, $\text{Ker}(L) = W$, donc $\text{Ker}(K|_W) = \{0\}$, soit $\dim K(W) = \dim W$. Le théorème du rang appliqué à L donne alors

$$\dim V = \dim \text{Ker}(L) + \text{rg}(L) = \dim K(W) + \text{rg}(L) \leq \dim K(W) + n - 1.$$

21. Si $M \in W$, la matrice M est triangulaire supérieure par blocs et $\chi_M = (X - a(M))\chi_{K(M)}$. Comme M est quasi-nilpotente, il s'ensuit que $a(M) = 0$ et que $K(M)$ est quasi-nilpotente. On peut donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence et l'inégalité de la question 20 permet d'obtenir

$$\dim V \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

22. D'après le lemme des colonnes, il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $C_j(V) = \{0\}$. Or, le raisonnement effectué à la question 15 montre qu'alors, $C_n(V^\sigma) = \{0\}$, où σ est la transposition qui échange j et n (ou n'importe quelle permutation telle que $\sigma(j) = n$). Alors, d'après la question 21,

$$\dim V = \dim V^\sigma \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$