

Dans tout le sujet,  $n$  désigne un entier naturel non nul et  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  stable par  $f$ , on note  $f|_F$  l'endomorphisme induit par  $f$  sur  $F$ .

Si  $M$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on définit la suite des puissances de  $M$  par  $M^0 = I_n$  et, pour tout entier naturel  $k$ , par la relation  $M^{k+1} = M M^k$ . De même, si  $u$  est un endomorphisme de  $E$ , on définit la suite des puissances de  $u$  par  $u^0 = \text{id}_E$  et, pour tout entier naturel  $k$ , par la relation  $u^{k+1} = u \circ u^k$ .

Une matrice  $M$  est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel  $k \geq 1$  tel que  $M^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$ . Dans ce cas, le plus petit entier naturel  $k \geq 1$  tel que  $M^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})}$  s'appelle l'*indice de nilpotence* de  $M$ . De même, un endomorphisme  $u$  de  $E$  est *nilpotent* s'il existe un entier naturel  $k \geq 1$  tel que  $u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$  et son indice de nilpotence est le plus petit entier naturel  $k \geq 1$  tel que  $u^k$  soit l'endomorphisme nul.

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on appelle *classe de similitude* de  $A$  l'ensemble des matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  semblables à  $A$ .

On pose  $J_1 = (0)$  et, pour un entier  $\alpha \geq 2$ ,  $J_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_\alpha(\mathbb{C})$ .

Si  $A_1 \in \mathcal{M}_{n_1}(\mathbb{C})$ ,  $A_2 \in \mathcal{M}_{n_2}(\mathbb{C})$ ,  $\dots$ ,  $A_k \in \mathcal{M}_{n_k}(\mathbb{C})$ , on note

$$\text{Diag}(A_1, A_2, \dots, A_k) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n_1+n_2+\dots+n_k}(\mathbb{C}).$$

## I. Premiers résultats

### I.A — Réduction des endomorphismes nilpotents en dimension 2

On suppose dans cette sous-partie que  $n = 2$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent d'indice  $p$ .

**Q 1.** Que peut-on dire si  $p = 1$  ?

On suppose dans les questions Q2 à Q5 que  $p \geq 2$ .

**Q 2.** Montrer qu'il existe un vecteur  $x$  de  $E$  tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0$ .

**Q 3.** Vérifier que la famille  $(u^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$  est libre. En déduire que  $p = 2$ .

**Q 4.** Montrer que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u)$ .

**Q 5.** Construire une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est égale à  $J_2$ .

**Q 6.** En déduire que les endomorphismes nilpotents de  $E$  sont exactement ceux de trace et de déterminant nuls.

### I.B — Réduction des endomorphismes nilpotents d'indice 2 en dimension $n$

On suppose dans cette sous-partie que  $n \geq 3$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent d'indice 2. On pose  $r = \text{rg}(u)$ .

**Q 7.** Montrer que  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$  et que  $2r \leq n$ .

**Q 8.** On suppose que  $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$ . Montrer qu'il existe des vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_r$  de  $E$  tels que la famille  $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$  soit une base de  $E$  et donner la matrice de  $u$  dans cette base.

**Q 9.** On suppose maintenant que  $\text{Im}(u) \neq \text{Ker}(u)$ . Montrer qu'il existe des vecteurs  $e_1, e_2, \dots, e_r$  de  $E$  et des vecteurs  $v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}$  appartenant à  $\text{Ker}(u)$  tels que  $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$  soit une base de  $E$ . Quelle est la matrice de  $u$  dans cette base ?

## I.C — Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette sous-partie,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $n \geq 1$ .

**Q 10.** Montrer que

$$A \text{ est nilpotente} \iff \text{Sp}(A) = \{0\} \iff \chi_A = X^n.$$

**Q 11.** Quelles sont les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à la fois nilpotentes et diagonalisables ?

**Q 12.** Montrer que  $A$  est nilpotente si, et seulement si, elle est semblable à une matrice triangulaire inférieure à diagonale nulle.

Dans les trois questions suivantes,  $A$  est nilpotente d'indice  $p$ .

**Q 13.** Montrer que tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  multiple de  $X^p$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**Q 14.** Réciproquement, soit  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$ . Montrer qu'il existe un unique entier  $m$  non nul et un polynôme  $Q$  tel que  $P = X^m Q$  avec  $Q(0) \neq 0$ . Montrer que  $Q(A)$  est inversible.

**Q 15.** En déduire l'ensemble des polynômes annulateurs de  $A$ .

## I.D — Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice  $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  donnée, on dit qu'une matrice  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est une racine carrée de  $V$  si  $R^2 = V$ .

**Q 16.** Soit  $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  telle que  $R^2 = J_3$ . Déterminer  $R^4$  et  $R^6$ , puis l'ensemble des racines carrées de  $J_3$ .

En général, soit  $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente d'indice  $p$ . On se propose d'étudier l'existence de racines carrées de  $V$ .

**Q 17.** Montrer que si  $V$  admet au moins une racine carrée, alors si  $p \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ .

**Q 18.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , déterminer les puissances de  $J_n$  et son indice de nilpotence. En déduire une matrice  $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , nilpotente d'indice  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$  et admettant au moins une racine carrée.

## II. Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents, partitions

### II.A — Réduction des matrices nilpotentes

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent. Pour  $x \in E$ , on note  $C_u(x) = \text{Vect}(u^k(x); k \in \mathbb{N})$ .

**Q 19.** Montrer que  $C_u(x)$  est stable par  $u$  et qu'une base de  $C_u(x)$  est donnée par  $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ , où  $s(x)$  (dont on justifiera en particulier l'existence) est le plus petit entier tel que  $u^{s(x)}(x) = 0$ . Déterminer, dans cette base, la matrice de l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $C_u(x)$ .

L'objectif de cette sous-partie est de démontrer la propriété

( $\mathcal{H}_p$ ): « Pour tout  $\mathbb{C}$ -e.v.  $E$  de dimension finie non nulle et tout endomorphisme  $u$  de  $E$  nilpotent d'indice  $p$ , il existe un entier  $k \geq 1$  et des vecteurs non nuls  $a_1, a_2, \dots, a_k$  de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^k C_u(a_i)$ . »

**Q 20.** Montrer ( $\mathcal{H}_1$ ). En utilisant les résultats de la partie I.B., montrer ( $\mathcal{H}_2$ ).

**Q 21.** Montrer que  $u$  induit sur  $\text{Im}(u)$  un endomorphisme nilpotent et déterminer son indice de nilpotence en fonction de celui de  $u$ .

**Q 22.** Démontrer ( $\mathcal{H}_p$ ) par récurrence sur  $p$ . Pour cette question difficile, on pourra présenter dans un premier temps la construction, avant de démontrer point par point ce qui doit l'être.

**Q 23.** Donner la matrice de  $u$  dans une base adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^k C_u(a_i)$ .

## II.B — Partitions d'entiers

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on appelle *classe de similitude* de  $A$  l'ensemble des matrices semblables à  $A$ . On s'intéresse ici au nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

En théorie des nombres, on appelle *partition de l'entier*  $n \in \mathbb{N}^*$  toute suite finie  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$  avec  $k \geq 1$  telle que

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k \quad \& \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n.$$

On note  $\Gamma_n$  l'ensemble des partitions de l'entier  $n$ . Ainsi,  $\Gamma_1 = \{(1)\}$ ,  $\Gamma_2 = \{(2), (1, 1)\}$ ,  $\Gamma_3 = \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}$ .

Enfin, pour tout partition  $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \Gamma_n$ , on note  $N_\sigma = \text{Diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \dots, J_{\alpha_k})$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente.

**Q 24.** À l'aide de la partie II.A, montrer qu'il existe une partition  $\sigma \in \Gamma_n$  telle que  $A$  soit semblable à la matrice  $N_\sigma$ .

Dans la suite, on fixe une telle partition  $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ . Pour  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $r_j = \text{rg}(A^j)$  et  $m_j$  le nombre de termes de la partition  $\sigma$  égaux à  $j$ .

**Q 25.** Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , montrer que  $r_j = \sum_{i=1}^k \max(0, \alpha_i - j)$ .

**Q 26.** En déduire, pour  $j \geq 1$ , une interprétation de  $r_{j-1} - r_j$  en termes de la partition  $\sigma$ . Exprimer alors  $m_j$  en fonction de la suite  $(r_i)_i$ .

**Q 27.** Montrer qu'il existe une unique partition  $\sigma \in \Gamma_n$  telle que  $A$  soit semblable à  $N_\sigma$ . Que peut-on en déduire quant au nombre de classes de similitudes de matrices nilpotentes dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ?

## II.C — Deux applications

**Q 28.** Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Déterminer la partition  $\sigma$  de l'entier 5 telle que  $A$  soit semblable à  $N_\sigma$ .

**Q 29.** Pour toute matrice nilpotente  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , montrer que  $M$ ,  $2M$  et  $M^T$  sont semblables. À l'aide de la partie I.C, montrer que si  $M$  et  $2M$  sont semblables, alors  $M$  est nilpotente.

## II.D — Un algorithme de calcul du nombre de partitions de $n$

**Q 30.** Déterminer  $\Gamma_4$  et  $\Gamma_5$ . Calculer les  $y_{n,j}$  pour  $1 \leq j \leq n \leq 5$  en présentant les résultats sous la forme d'un tableau à double entrée. On ne donnera aucune justification.

Pour  $n$  et  $j$  entiers naturels non nuls, on note  $Y_{n,j}$  l'ensemble des partitions de  $n$  dont le premier terme  $\alpha_1$  est inférieur ou égal à  $j$  et  $y_{n,j}$  le cardinal de cet ensemble. Par convention, on pose  $y_{0,0} = 1$  et  $y_{n,0} = 0$  pour tout  $n \geq 1$ .

**Q 31.** Calculer  $y_{n,1}$ .

On se propose de montrer que, pour  $2 \leq j \leq n$ , alors  $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j, \min(j, n-j)}$ .

**Q 32.** Démontrer que cette égalité est vraie pour  $j = n$ .

**Q 33.** Pour  $j < n$ , vérifier que  $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}$ . Conclure.

**Q 34. (Question hors barème à traiter chez soi)** Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier  $n \geq 1$  et qui renvoie  $y_{n,n}$ .

## III. Vecteurs propres généralisés, réduction de Jordan générale

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour une valeur propre  $\lambda$  de  $f$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $G_\lambda^{(k)}(f) = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)^k$  et  $G_\lambda(f) = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_\lambda^{(k)}(f)$ .

On appelle *vecteur propre généralisé* de  $f$  associé à  $\lambda$  l'ensemble des vecteurs non nuls de  $G_\lambda(f)$ . Les espaces  $G_\lambda(f)$  sont appelés *sous-espaces caractéristiques* de  $f$ .

**Q 35.** À  $\lambda$  fixé, montrer que la suite  $(G_\lambda^{(k)}(f))_{k \in \mathbb{N}}$  est monotone et stationnaire à partir du premier indice  $p$  tel que  $G_\lambda^{(p)}(f) = G_\lambda^{(p+1)}(f)$ . En déduire qu'il existe un plus petit entier  $p(\lambda)$  tel que  $G_\lambda(f) = G_\lambda^{(p(\lambda))}(f)$  et que  $G_\lambda(f)$  est un espace vectoriel de dimension au moins égale à 1 contenant l'espace propre  $E_\lambda(f)$ .

**Q 36.** Soient  $\lambda \in \text{Sp}(f)$  et  $G_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)^{p(\lambda)}$ . Montrer que  $E = G_\lambda(f) \oplus \text{Im}(f - \lambda \text{id}_E)^{p(\lambda)}$ .

**Q 37.** Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres de  $f$  deux à deux distinctes. Soit  $(x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \prod_{i=1}^p G_{\lambda_i}(f)$  une famille de vecteurs telle que  $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E$ . On suppose que  $x_i \neq 0_E$  pour un certain  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Justifier l'existence d'un entier  $m$  tel que  $w_i = (f - \lambda_i \text{id}_E)^{m-1}(x_i)$  soit un vecteur propre de  $f$ . En calculant  $P(f)(x_1 + x_2 + \dots + x_p)$  de deux manières différentes pour un polynôme  $P$  bien choisi, montrer que  $w_i = 0$ . En déduire que les sous-espaces caractéristiques de  $f$  sont en somme directe.

**Q 38.** On peut maintenant établir la *décomposition en sous-espaces caractéristiques*. En raisonnant par récurrence sur  $n$ , montrer que  $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} G_\lambda(f)$ .

**Q 39.** Donner une expression de  $\chi_f$  en fonction des  $G_{\lambda_i}(f)$  n'utilisant pas le déterminant.

**Q 40.** Déduire des questions précédentes une preuve du théorème de Cayley-Hamilton dans le cas d'un e.v. complexe.

**Q 41.** Énoncer et démontrer un théorème améliorant la trigonalisation sur  $\mathbb{C}$ . Dans quelle mesure s'étend-il à  $\mathbb{R}$  ?