# DMS 3 - PSI\* — 2025-2026 — Corrigé

## Problème 2, Centrale-Supélec 2019, PSI, modifié

Corrigé provisoire (la question 22 n'est pas terminée et il manque la question d'informatique, que vous n'étiez pas censés aborder en temps limité). Il faut aussi relire... C'est un beau problème, mais assez long...

On pose 
$$J_1 = (0)$$
 et, pour un entier  $\alpha \geqslant 2$ ,  $J_{\alpha} = \sum_{i=1}^{\alpha-1} E_{i+1,i} \in \mathcal{T}_{\alpha}^{-}(\mathbb{C})$ .

## I. Premiers résultats

## I.A — Réduction des endomorphismes nilpotents en dimension 2

Dans cette sous-partie, E est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 2. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme nilpotent d'indice p.

- **Q 1.** Si p=1, cela signifie par définition que  $u^1=u=0_{\mathscr{L}(E)}$ . On suppose désormais que  $p\geqslant 2$ .
- **Q 2.** Par minimalité de  $p, u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ , donc il existe un vecteur x de E tel que  $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ .
- **Q3.** Soit  $(\alpha_k)_{0 \le k \le p-1} \in \mathbb{C}^p \setminus \{0_{\mathbb{C}^p}\}$  tel que  $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(x) = 0$ . Notons  $r = \min\{k \in [0, p-1]; \alpha_k \ne 0_{\mathbb{C}}\}$ . Ce minimum

existe, puisque l'ensemble considéré est non vide par hypothèse. En composant par  $u^{p-1-r}$  et en tenant compte de ce que  $u^m(x) = 0_E$  pour tout  $m \ge p$ , il vient

$$\sum_{k=r}^{p-1} \alpha_k u^{p-1-r+k}(x) = \alpha_r u^{p-1}(x) + \sum_{k=r+1}^{p-1} \alpha_k u^{p-1-r+k}(x) = \alpha_r u^{p-1}(x) + \sum_{k=r+1}^{p-1} 0_E = \alpha_r u^{p-1}(x) = 0_E,$$

d'où  $\alpha_r = 0_{\mathbb{C}}$ , puisque  $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ . On obtient ainsi une contradiction avec le fait que les  $\alpha_k$  ne sont pas tous nuls, ce qui montre que la famille  $\left(u^k(x)\right)_{0\leqslant k\leqslant p-1}$  est libre. En dimension 2, une famille libre est de cardinal au plus 2, donc  $p\leqslant 2$ . Comme on a supposé que  $p\geqslant 2$ , il vient p=2.

 ${\bf Q}$ 4. D'après la question précédente, on a  $u^2=0_{\mathscr{L}(E)}.$  Or,

$$u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \forall x \in E \colon u(u(x)) = 0_E \iff \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u) \qquad \therefore \qquad \dim \mathrm{Im}(u) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(u).$$

Par ailleurs, le théorème du rang donne  $\dim \operatorname{Ker}(u) + \dim \operatorname{Im}(u) = \dim E = 2$  et p = 2 montre que  $\operatorname{Ker}(u) \neq E$ , soit  $\dim \operatorname{Ker}(u) \leq 1$ . La seule possibilité est  $\dim \operatorname{Ker}(u) = \dim \operatorname{Im}(u) = 1$ , ce qui, associé à l'inclusion  $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$ , assure l'égalité, soit  $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u)$ .

- **Q 5.** La question 3 donne une base de la forme  $\mathscr{B} = (x, u(x))$ . Dans cette base,  $\operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_2$ .
- ${f Q}$  6. On calcule  $\chi_{J_2}=X^2$  (cas p=2), qui est aussi le polynôme caractéristique de l'endomorphisme nul (cas p=1). Or, E étant de dimension 2, on a  $\chi_u=X^2-{\rm tr}(u)X+{\rm det}(u)$  pour tout  $u\in \mathscr{L}(E)$ .

Réciproquement, si  $\chi_u = X^2$ , le théorème de Cayley-Hamilton donne  $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ , donc u est nilpotent. Les endomorphismes nilpotents de E sont donc exactement ceux de trace et de déterminant nuls.

### I.B — Réduction des endomorphismes nilpotents d'indice 2 en dimension n

On suppose dans cette sous-partie que  $n \ge 3$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent d'indice 2. On pose r = rg(u).

**Q7.** On a déjà fait la remarque à la question  $4: u^2 = 0_{\mathcal{L}(E)}$  équivaut à  $\operatorname{Im}(u) \subset \operatorname{Ker}(u)$  (et c'est indépendant de la dimension). Par ailleurs, le théorème du rang donne ici dim  $\operatorname{Ker}(u) = n - r$  et l'inclusion entraı̂ne dim  $\operatorname{Im}(u) \leq \operatorname{dim} \operatorname{Ker}(u)$ , soit  $r \leq n - r$  et, donc,  $2r \leq n$ .

**Q 8.** Soit  $(f_1, f_2, ..., f_r)$  une base de Im(u) = Ker(u), qui est par hypothèse de dimension r, ce qui entraı̂ne par le théorème du rang que n = 2r. Pour  $k \in [1, r]$ , soit  $e_k$  tel que  $u(e_k) = f_k$  et  $G = \text{Vect}(e_1, e_2, ..., e_r)$ . L'image de  $(e_k)_{1 \le k \le r}$  par u étant une famille libre,  $(e_k)_{1 \le k \le r}$  est libre. De plus,  $u_{|G}$  est un application injective car

$$\forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{C}^r \colon u\bigg(\sum_{i=1}^r \alpha_i e_i\bigg) = \sum_{i=1}^r \alpha_i f_i = 0_E \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0_{\mathbb{C}} \iff \sum_{i=1}^r \alpha_i e_i = 0_E.$$

Ainsi,  $G \cap \text{Ker}(u) = \{0_E\}$ , ce qui montre que G et Ker(u) sont en somme directe et supplémentaires par dimension. On a montré que  $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$  est une base de E. Il est clair que la matrice de u dans cette base est  $\text{Diag}(J_2, J_2, \dots, J_2)$ .

**Q 9.** On suppose maintenant que  $\operatorname{Im}(u) \neq \operatorname{Ker}(u)$ . La construction commence de la même façon avec  $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$  une base de  $\operatorname{Im}(u)$  et  $G = \operatorname{Vect}(e_1, e_2, \ldots, e_r)$  avec  $u(e_k) = f_k$ . Les sous-espaces G et  $\operatorname{Ker}(u)$  sont toujours en somme directe, d'où  $E = G \oplus \operatorname{Ker}(u)$ . En notant que dim  $\operatorname{Ker}(u) = n - r$ , on complète enfin  $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$  en une base  $(f_1, f_2, \ldots, f_r, v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r})$  de  $\operatorname{Ker}(u)$ , ce qui donne une base de E de la forme

$$(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}),$$

dans laquelle la matrice de u est

$$Diag(J_2, J_2, \dots, J_2, 0_{n-2r}) = Diag(\underbrace{J_2, \dots, J_2}_{\#r}, \underbrace{J_1, \dots, J_1}_{\#n-2r}).$$

I.C — Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette sous-partie,  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  avec  $n \ge 1$ .

- **Q10.** Les racines du polynôme caractéristique étant exactement l'ensemble des valeurs propres, on a  $\operatorname{Sp}(A) = \{0\} \iff \chi_A = X^n$ . Par ailleurs, le théorème de Cayley-Hamilton montre que si  $\chi_A = X^n$ , alors  $A^n = 0$ , donc A est nilpotente. Supposons enfin A nilpotente. Alors, A admet un polynôme annulateur de la forme  $X^p$ , dont 0 est l'unique racine, d'où  $\operatorname{Sp}(A) \subset \{0\}$ . Comme  $\operatorname{Sp}(A) \neq \varnothing$  (A est complexe), on a donc  $\operatorname{Sp}(A) \subset \{0\}$ . Mentionnons que le résultat est également vrai pour les matrices réelles car une matrice nilpotente n'est jamais inversible et a donc 0 comme valeur propre.
- **Q 11.** Une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à la fois nilpotente et diagonalisable est semblable à la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls par la question 10, donc à la matrice nulle. La classe de similitude de la matrice nulle étant réduite à elle même, celle-ci est la seule matrice à la fois nilpotente et diagonalisable.
- **Q 12.** Si A est nilpotente, elle est trigonalisable et donc semblable à une matrice triangulaire inférieure ayant les valeurs propres de A, donc des zéros, sur la diagonale. Réciproquement, en notant  $\phi_A$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à A,  $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  et  $F_k = \text{Vect}(e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n)$  pour  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$  (avec  $F_{n+1} = \{0\}$ ),  $A \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{C})$  si, et seulement si,  $\phi_A(F_k) \subset F_{k+1}$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ . Ainsi,  $\text{Im}(\phi_A) = \phi_A(F_1) \subset F_2$ ,  $\text{Im}(\phi_A^2) \subset F_3$  et, par une récurrence immédiate,  $\text{Im}(\phi_A^k) \subset F_{k+1}$ . En bout de chaîne,  $\text{Im}(\phi_A^n) \subset F_{n+1} = \{0\}$ , donc  $\phi_A^n = 0$  et A est nilpotente.

Dans les trois questions suivantes, A est nilpotente d'indice p.

**Q13.** Comme A est nilpotente d'indice  $p, X^p$  est un polynôme annulateur de A. Corrélativement, pour tout  $Q \in \mathbb{C}[X]$ ,  $X^pQ(A) = A^pQ(A) = 0$ , donc tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  multiple de  $X^p$  est un polynôme annulateur de A.

**Q14.** Réciproquement, soit P est un polynôme annulateur de A. Comme 0 est valeur propre de A, 0 est racine de P. Notons m son ordre de multiplicité. Par définition,  $P = X^mQ$  avec  $Q(0) \neq 0$ . Pour  $Q = \prod_{i=1}^s (X - \alpha_i)$ ,  $Q(A) = \prod_{i=1}^s (A - \alpha_i I_n)$  est un produit de s matrices inversibles, puisqu'aucun des  $\alpha_i$  n'est nul, donc n'est valeur propre de A. Ainsi, Q(A) est inversible.

**Q 15.** Poursuivons le raisonnement de la question précédente : on écrit  $A^mQ(A) = 0$  et l'on multiplie par  $Q(A)^{-1}$ , ce qui donne  $A^m = 0$ , d'où  $m \ge p$  par minimalité de l'indice de nilpotence, soit  $P = X^p(X^{m-p}Q)$ . On peut conclure : les polynômes annulateurs de A sont les multiples de  $X^p$ . Autrement dit,  $Ann(A) = X^p\mathbb{C}[X]$ .

Notons que la réciproque se montre aussi en prenant un polynôme annulateur P de A et en effectuant la division euclidienne de P par  $X^p$ , ce qui donne  $P = QX^p = R$ . Alors  $P(A) = Q(A)A^p + R(A) = R(A)$ . La version matricielle de la question 3 montre qu'aucun polynôme non nul de degré strictement inférieur à p n'annule A, d'o'ù R = 0 et l'on retrouve  $Ann(A) = X^p\mathbb{C}[X]$ .

### I.D — Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice  $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  donnée, on dit qu'une matrice  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est une racine carrée de V si  $R^2 = V$ .

**Q16.** Soit  $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  telle que  $R^2 = J_3$ . On calcule  $R^4 = J_3^2 = E_{3,1}$  et  $R^6 = R^4 \times R^2 = E_{3,1}(E_{2,1} + E_{3,2}) = 0$ . Ainsi, R est nilpotente, donc  $R^3 = 0$  d'après la question 10, ce qui contredit le calcul de  $R^4$ . Aussi la matrice  $J_3$  n'admet-elle pas de racine carrée.

En général, soit  $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente d'indice p et  $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $R^2 = V$ .

**Q 17.** Par hypothèse,  $V^p = R^{2p} = 0$ , donc R est nilpotente. Comme  $V^{p-1} = R^{2p-2} \neq 0$ , l'indice de nilpotence de R vaut au moins 2p-1, ce qui n'est possible que si  $2p-1 \leqslant n$  en vertu de la question 10, soit  $p \leqslant \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ , p étant évidemment entier.

**Q 18.** On note dans cette question  $u_n$  l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $J_n$  et  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . On a ainsi  $u_n(e_i) = e_{i+1}$  pour  $1 \le i \le n-1$  et  $u_n(e_n) = 0$ . En itérant, il vient  $u_n^k(e_i) = e_{i+k}$  pour  $1 \le i \le n-k$  et  $u_n^k(e_i) = 0$  pour  $n-k+1 \le i \le n$ . Ainsi, l'indice de nilpotence de  $J_n$  est donc n.

Corrélativement,  $J_n^2$  est d'indice de nilpotence  $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ .

## II. Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents, partitions

#### II.A — Réduction des matrices nilpotentes

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent. Pour  $x \in E$ , on note  $C_u(x) = \text{Vect}(u^k(x); k \in \mathbb{N})$ .

Q 19. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent d'indice p. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $u(u^k(x)) = u^{k+1}(x) \in C_u(x)$ , donc  $C_u(x)$  est stable par u. Comme  $u^p(x) = 0_E$ , l'ensemble  $\{k \in \mathbb{N}^*; s^k(x) = 0_E\}$  est non vide et admet donc un plus petit élément, noté s(x). D'après la preuve de la question 3 (qui n'utilise pas au début le fait que l'espace est de dimension 2), la famille  $(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x))$  est libre et c'est donc une base de  $C_u(x)$ , puisque  $u^k(x) = 0_E$  pour tout  $k \ge s(x)$ . Enfin, dans cette base, la matrice de  $u_{\parallel C_u(x)}$  est  $J_{s(x)}$ .

L'objectif de cette sous-partie est de démontrer la propriété

 $(\mathcal{H}_p)$ : « Pour tout  $\mathbb{C}$ -e.v. E de dimension finie et tout endomorphisme u de E nilpotent d'indice p, il existe des

vecteurs non nuls 
$$a_1, a_2, \ldots, a_k$$
 de  $E$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^k C_u(a_i)$ . »

**Q 20.** Si u est d'indice de nilpotence 1, u est l'endomorphisme nul, comme on la vu à la question 1. Alors, pour tout  $x \neq 0_E$ , on a  $C_u(x) = \text{Vect}(x)$ . Ainsi, si  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  est une base de E, on a  $E = C_u(a_1) \oplus C_u(a_2) \oplus \cdots \oplus C_u(a_n)$ , ce qui montre  $(\mathcal{H}_1)$ .

Les questions 8 et 9 montrent qu'il existe une base de E de la forme  $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$  avec  $(v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}) \in (\text{Ker}(u))^{n-2r}$ , la question 8 correspondant au cas n = 2r. Comme u est d'indice de nilpotence 2, on a  $C_u(e_i) = \text{Vect}(e_i, u(e_i))$  pour  $i \in [1, r]$  et l'on a par ailleurs  $C_u(v_i) = \text{Vect}(v_i)$  pour  $i \in [1, n-2r]$ .

Ainsi, en posant k = n - r,  $a_i = e_i$  pour  $i \in [1, r]$  et  $a_i = v_{r-i}$  pour  $i \in [r+1, n-r]$ , on a bien  $E = \bigoplus_{i=0}^k C_u(a_i)$ .

- **Q 21.** C'est un fait général que u induit sur Im(u) un endomorphisme. Il est trivial que celui-ci est nilpotent car si  $u^p(x) = 0_E$  pour tout  $x \in E$ , c'est vrai a fortiori pour tout  $x \in \text{Im}(u)$ . Enfin, pour tout  $y = u(x) \in \text{Im}(u)$ , on a  $u^{p-1}(y) = u^p(x) = 0_E$  et, si  $u^{p-1}(x_0) \neq 0_E$ , on a  $u^{p-2}(u(x)) \neq 0_E$ . Finalement,  $u_{\parallel \text{Im}(u)}$  est d'indice de nilpotence p-.
- **Q 22.** La récurrence a été initialisée à la question 20. La question 21 incite à effectuer une récurrence simple et à appliquer  $(\mathcal{H}_{p-1})$  à  $u_{\parallel \operatorname{Im}(u)}$ . Pour ce faire, on commence (mentalement ou au brouillon, pas sur la copie) à relire la démonstration du cas p=2 (questions 8 et 9) à la lumière de cette esquisse de raisonnement. On avait 1) choisi une base de  $\operatorname{Im}(u)$  (les vecteurs  $f_k$  du corrigé), 2) pris des images réciproques des vecteurs de cette base (les vecteurs  $e_k$ , 3) montré que leur concaténation formait une famille libre, 4) justifié que l'on pouvait compléter ces  $2\operatorname{rg}(u)$  vecteurs en une base de E avec des vecteurs de  $\operatorname{Ker}(u)$ . Cela suggère le plan suivant :
  - (1) décomposer l'image de u sous la forme  $\operatorname{Im}(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} C_u(b_i)$ ;
  - (2) pour tout  $i \in [1, k]$  considérer des vecteurs  $a_i$  tels que  $u(a_i) = b_i$ ;
  - (3) montrer que la somme  $\sum_{i=1}^{k} C_u(a_i)$  est directe;
  - (4) justifier que  $E = \bigoplus_{i=1}^k C_u(a_i) + \operatorname{Ker}(u)$  et compléter alors avec des vecteurs de  $\operatorname{Ker}(u)$  sachant que, pour tout vecteur  $x \in \operatorname{Ker}(u)$  non nul,  $C_u(x) = \operatorname{Vect}(x)$ .

Yapluka...

Q 23. Dans une base adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^k C_u(a_i)$ , la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant les matrices de  $u_{\parallel C_u(a_i)}$ . Si l'on choisit de plus une base de  $C_u(a_i)$  de la forme  $(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x))$ , alors la matrice de u dans cette base sera  $\mathrm{Diag}(J_{s(a_1)}, J_{s(a_2)}, \dots, J_{s(a_k)})$ .

### II.B — Partitions d'entiers

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on appelle classe de similitude de A l'ensemble des matrices semblables à A. On s'intéresse ici au nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

En théorie des nombres, on appelle partition de l'entier  $n \in \mathbb{N}^*$  toute suite finie  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$  avec  $k \ge 1$  telle que

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k$$
 &  $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n$ .

On note  $\Gamma_n$  l'ensemble des partitions de l'entier n. Ainsi,  $\Gamma_1 = \{(1)\}$ ,  $\Gamma_2 = \{(2), (1, 1)\}$ ,  $\Gamma_3 = \{(3), (2, 1), (1, 1, 1)\}$ .

Enfin, pour tout partition  $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) \in \Gamma_n$ , on note  $N_{\sigma} = \text{Diag}(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \dots, J_{\alpha_k})$ .

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente.

**Q 24.** La question 23 montre qu'il existe une base dans laquelle la matrice de A est  $\text{Diag}(J_{s(a_1)}, J_{s(a_2)}, \dots, J_{s(a_k)})$ . En ordonnant  $(a_i)_{1 \leq i \leq k}$  par ordre décroissant de  $(s(a_i))_{1 \leq i \leq k}$ , on obtient bien une partition  $\sigma \in \Gamma_n$  telle que A soit semblable à la matrice  $N_{\sigma}$ .

Dans la suite, on fixe une telle partition  $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ . Pour  $j \in \mathbb{N}$ , on note  $r_j = \operatorname{rg}(A^j)$ . On note enfin  $m_j$  le nombre de termes de la partition  $\sigma$  égaux à j.

**Q 25.** On a montré à la question 18 qu'avec  $J_q = \sum_{i=1}^{q-1} E_{i+1,i} \in \mathscr{M}_q(\mathbb{C}), \ J_q^m = \sum_{i=1}^{q-m} E_{i+m,i}$ , qui est clairement de rang q-m si  $m \leq q$  et de rang nul si  $m \geq q$ . Autrement dit,  $\operatorname{rg}(J_q^k) = \max(0, q-k)$ .

Comme  $N_{\sigma} = \text{Diag}\left(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \dots, J_{\alpha_k}\right), N_{\sigma}^j = \text{Diag}\left(J_{\alpha_1}^j, J_{\alpha_2}^j, \dots, J_{\alpha_k}^j\right)$  et, le rang d'une matrice diagonale par blocs étant la somme des rangs de ses blocs diagonaux,  $r_j = \sum_{i=1}^k \max(0, \alpha_i - j)$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ .

**Q 26.** On a montré à la question précédente que  $\operatorname{rg}(J_q^j) = \max(0, q-j)$ . Corrélativement, le passage de  $J_q^{j-1}$  à  $J_q^j$  diminue le degré de 1 si  $\operatorname{rg}(J_q^{j-1}) > 0$  et ne le modifie pas sinon. Autrement dit,  $\operatorname{rg}(J_q^{j-1}) - \operatorname{rg}(J_q^j)$  vaut 1 si  $j \leq q$  et 0 si j > q. En sommant,

$$r_{j-1} - r_j = \sum_{i=1}^k \left[ \operatorname{rg}(J_{\alpha_i}^{j-1}) - \operatorname{rg}(J_{\alpha_i}^{j}) \right] = \sum_{\substack{1 \le i \le k \\ j \le \alpha_i}} 1 = \# \left\{ i \in [1, k]; \ \alpha_i \ge j \right\}$$

compte le nombre d'entiers de la partition  $\sigma$  au moins égaux à j. Il s'ensuit

$$\begin{split} m_j &= \# \big\{ i \in [\![ 1,k ]\!] \, ; \, \, \alpha_i = j \big\} = \# \big\{ i \in [\![ 1,k ]\!] \, ; \, \, \alpha_i \geqslant j \big\} - \# \big\{ i \in [\![ 1,k ]\!] \, ; \, \, \alpha_i \geqslant j+1 \big\} \\ &= (r_{j-1} - r_j) - (r_j - r_{j+1}) = r_{j+1} - 2 r_j + r_{j-1}. \end{split}$$

**Q27.** L'existence de la partition  $\sigma \in \Gamma_n$  a été établie à la question 25. Dans la mesure où une partition est entièrement décrite par la suite  $(m_j)_{j\geqslant 1}$  et que ces valeurs sont des fonctions du rang des puissances de A, il y a unicité.

Par ailleurs, le nombre de partitions d'un entier n est fini (il est trivialement majoré par  $n^n$ , puisque tant sa longueur que ses éléments sont compris entre 1 et n). Aussi le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est-il fini, égal au nombre de partitions de n.

Ce nombre de partitions a été largement étudié. Hardy et Ramanujan ont notamment montré que le nombre de partitions de n, classiquement noté p(n), vérifie  $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$ .

#### II.C — Deux applications

**Q28.** Soit 
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
. On note que  $L_2(A) = 0$  et que  $L_3(A) = L_4(A)$ . Par ailleurs, il est immédiat

que  $(L_1(A), L_3(A), L_5(A))$  est libre, ce qui montre que  $r_1 = \operatorname{rg}(A) = 3$ . On note ensuite que  $C_1(A^2) = C_5(A^2) = 0$ ,  $C_2(A^2) = -C_1(A) + C_3(A) + C_4(A) + C_5(A) = C_5(A)$  et  $C_k(A^2) = \pm C_5(A)$  pour  $k \in \{3, 4\}$ , ce qui assure que  $r_2 = \operatorname{rg}(A^2) = 1$  et que A est nilpotente d'indice A est semblable à A DiagA est semblable à A DiagA est semblable à DiagA

est raisonnable, vu que 2 + 3 = 5...

**Q29.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice nilpotente. Comme  $\operatorname{rg}(A^j) = \operatorname{rg}(2^j A^j) = \operatorname{rg}(A^{\mathsf{T}_j})$ , les trois matrices sont semblables à la même réduite de Jordan  $N_{\sigma}$  et donc semblables.

Comme  $AX = \lambda X \iff (2A)X = (2\lambda)X$ , l'application  $x \mapsto 2x$  réalise une bijection de  $\operatorname{Sp}(A)$  sur  $\operatorname{Sp}(2A)$ . Si A et 2A sont semblables, elles ont même spectre, ce qui implique que si  $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ , alors  $2\lambda$  et, par une récurrence immédiate,  $2^m\lambda$  est valeur propre de A pour tout m. Ainsi, si A possédait une valeur propre non nul, son spectre serait infini, ce qui n'est pas possible. On a ainsi montré que  $\operatorname{Sp}(A) \subset \{0_{\mathbb{C}}\}$ , donc que  $\operatorname{Sp}(A) = \{0_{\mathbb{C}}\}$ , donc que A est nilpotente par la question A.

#### II.D — Un algorithme de calcul du nombre de partitions de n

## $\mathbf{Q}$ 30. On calcule

$$\Gamma_4 = \{(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\} \quad \& \quad \Gamma_5 = \{(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}.$$

	n = 1	n=2	n=3	n=4	n=5
j=1	1	1	1	1	1
j=2	0	2	2	3	3
j=3	0	0	3	4	5
j=4	0	0	0	5	6
j=5	0	0	0	0	7

Pour n et j entiers naturels non nuls, on note  $Y_{n,j}$  l'ensemble des partitions de n dont le premier terme  $\alpha_1$  est inférieur ou égal à j et  $y_{n,j}$  le cardinal de cet ensemble. Par convention, on pose  $y_{0,0} = 1$  et  $y_{n,0} = 0$  pour tout  $n \ge 1$ .

**Q 31.** Par définition,  $Y_{n,1} = \{(1,1,\ldots,1)\}$ , d'où  $y_{n,1} = 1$ .

On se propose de montrer que, pour  $2 \le j \le n$ , alors  $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\min(j,n-j)}$ .

**Q 32.** Pour j = n, l'identité à prouver est  $y_{n,n} = y_{n,n-1} + y_{0,0} = y_{n,n-1} + 1$ , qui vient de  $\Gamma_n = Y_{n,n} = \{(n)\} \uplus Y_{n,n-1}$ .

**Q 33.** Pour  $2 \leq j < n$ , l'ensemble  $Y_{n,j}$  est la réunion disjointe de  $Y_{n,j-1}$  et des partitions de n de la forme  $\sigma = (j, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ , à qui l'on peut associer bijectivement les partitions  $(\alpha_2, \dots, \alpha_k)$  de n-j vérifiant  $\alpha_2 \leq j$ , soit l'ensemble  $Y_{n-j,j}$ . On en déduit que  $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}$ .

De plus, il est clair que si  $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  est une partition de n, alors  $\alpha_1 \leq n$ , ce qui s'écrit  $Y_{n,k} = Y_{n,\min(n,k)}$ . En particulier,  $Y_{n-j,j} = Y_{n-j,\min(n-j,j)}$ , d'où  $y_{n-j,j} = y_{n-j,\min(n-j,j)}$ , ce qui termine la démonstration de la formule.

**Q 34.** Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier  $n \ge 1$  et qui renvoie  $y_{n,n}$ .

## III. Vecteurs propres généralisés, réduction de Jordan générale

Cette partie ne figurait pas dans le problème de Centrale. Elle est essentiellement tirée du chapitre 8 de Sheldon Axler, Linear Algebra done right, Springer.

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour une valeur propre  $\lambda$  de f et  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $G_{\lambda}^{(k)}(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E)^k$  et  $G_{\lambda}(f) = \bigcup_{k=0}^{\infty} G_{\lambda}^{(k)}(f)$ .

On appelle vecteur propre généralisé de f associé à  $\lambda$  l'ensemble des vecteurs non nuls de  $G_{\lambda}(f)$ . Les espaces  $G_{\lambda}(f)$  sont appelés sous-espaces caractéristiques de f.

**Q 35.** Soit  $g \in \mathcal{L}(E)$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in \text{Ker}(g^k)$ , on a  $g^{k+1}(x) = g(g^k(x)) = g(0_E) = 0_E$ , ce qui montre que la suite des espaces  $\left(\operatorname{Ker}(g^k)\right)_{k\geqslant 0}$  est croissante au sens de l'inclusion. Corrélativement, la suite  $\left(\dim\operatorname{Ker}(g^k)\right)_{k\geqslant 0}$  est une suite croissante d'entiers. Comme elle est majorée par  $n=\dim E$ , il existe donc un entier k telle que  $\dim\operatorname{Ker}(g^{k+1})=\dim\operatorname{Ker}(g^k)$ , d'où  $\operatorname{Ker}(g^{k+1})=\operatorname{Ker}(g^k)$  du fait de l'inclusion  $\operatorname{Ker}(g^{k+1})\supset\operatorname{Ker}(g^k)$ . Montrons qu'alors,  $\operatorname{Ker}(g^{k+2})=\operatorname{Ker}(g^{k+1})$ . Comme  $\operatorname{Ker}(g^{k+1})\subset\operatorname{Ker}(g^{k+2})$ , il suffit de montrer l'inclusion réciproque. Soit  $x\in\operatorname{Ker}(g^{k+2})$ . Alors,  $g(x)\in\operatorname{Ker}(g^{k+1})=\operatorname{Ker}(g^k)$ , donc  $x\in\operatorname{Ker}(g^{k+1})$ .

Bilan : il existe un plus petit entier p tel que  $\operatorname{Ker}(g^p) = \operatorname{Ker}(g^{p+1})$  et l'on a alors  $\operatorname{Ker}(g^{p+k}) = \operatorname{Ker}(g^p)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Enfin,  $\bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{Ker}(g^k)$  est une réunion croissante égale à  $\operatorname{Ker}(g^p)$  et est donc un sous-espace vectoriel de E.

Soit maintenant  $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$ . On applique ce qui précède à  $g = f - \lambda \operatorname{id}_E$ , ce qui donne (presque) le résultat. Il suffit de mentionner encore que  $\{0_E\} \neq E_{\lambda}(f) \subset G_{\lambda}(f)$  pour en déduire que  $G_{\lambda}(f)$  est un espace vectoriel de dimension au moins égale à 1 contenant l'espace propre  $E_{\lambda}(f)$ .

**Q 36.** On reprend le fil de la question précédente pour  $g \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $y \in \text{Ker}(g^{(p)}) \cap \text{Im}(g^{(p)})$ . Comme  $y \in \text{Im}(g^{(p)})$ , il existe  $x \in E$  tel que  $g^p(x) = y$ . Alors,  $g^{2p}(x) = g^p(y) = 0_E$ . Ainsi,  $x \in \text{Ker}(g^{2p}) = \text{Ker}(g^p)$ , soit y = 0. Il s'ensuit que  $Ker(g^p)$  et  $Im(g^p)$  sont en somme directe, donc supplémentaires par dimension en vertu du théorème du rang.

En appliquant, comme dans la question précédente, ce résultat à  $q = f - \lambda i d_E$ , il vient

$$E = \operatorname{Ker}(f - \lambda \operatorname{id}_E)^{p(\lambda)} \oplus \operatorname{Im}(f - \lambda \operatorname{id}_E)^{p(\lambda)} = G_{\lambda}(f) \oplus \operatorname{Im}(f - \lambda \operatorname{id}_E)^{p(\lambda)}.$$

**Q 37.** Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  des valeurs propres de f deux à deux distinctes. Soit  $(x_i)_{1 \le i \le p} \in \overset{\cdot}{\prod} G_{\lambda_i}(f)$  une famille de vecteurs telle que  $x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E$ . On suppose qu'il existe  $i \in [1, p]$  tel que  $x_i \neq 0$ . Comme  $x_i \in G_{\lambda_i}(f)$ , on peut poser  $m = \min \{k \in \mathbb{N}^*; x_j \in \text{Ker}(f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^k\}$ . Par construction,  $w_i = (f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m-1}(x_i) \in E_{\lambda_i}(f) \setminus \{0_E\}$ .

Soit alors  $P = (X - \lambda_i)^{m-1} \prod_{\substack{1 \leq j \leq p \\ i \neq i}} (X - \lambda_j)^{p(\lambda_j)}$ . Pour  $j \in [1, p] \setminus \{i\}$ , la commutation des endomorphismes de  $\mathbb{C}[f]$ 

donne

$$P(f)(x_j) = (f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m-1} \circ \prod_{\substack{1 \le r \le p \\ r \notin \{i,j\}}} (f - \lambda_r \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_r)} \circ (f - \lambda_j \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_j)} (x_j)$$

$$= \left[ (f - \lambda_i \operatorname{id}_E)^{m-1} \circ \prod_{\substack{1 \le r \le p \\ r \notin I_i \text{ id}}} (f - \lambda_r \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_r)} \right] (0_E) = 0_E.$$

Par ailleurs,

$$P(f)(x_i) = \prod_{\substack{1 \le r \le p \\ r \ne i}} (f - \lambda_r \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_r)}(w_i) = \prod_{\substack{1 \le r \le p \\ r \ne i}} (\lambda_i - \lambda_r)^{p(\lambda_r)} w_i \qquad \therefore$$

$$P(f)(x_i) = \prod_{\substack{1 \leq r \leq p \\ r \neq i}} (f - \lambda_r \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_r)}(w_i) = \prod_{\substack{1 \leq r \leq p \\ r \neq i}} (\lambda_i - \lambda_r)^{p(\lambda_r)} w_i \quad \therefore$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_p = 0_E \Longrightarrow P(f)(x_1 + x_2 + \dots + x_p) = P(f)(x_i) = \underbrace{\prod_{\substack{1 \leq r \leq p \\ r \neq i}} (\lambda_i - \lambda_r)^{p(\lambda_r)}}_{1 \leq r \leq p} w_i = P(f)(0_E) = 0_E.$$

Le produit étant non nul, il vient  $w_i = 0_E$ , en contradiction avec le fait que  $w_i$  soit un vecteur propre. On a montré que les sous-espaces caractéristiques sont en somme directe.

**Q38.** On raisonne par récurrence forte sur  $n = \dim E$ . En dimension  $1, f \in \mathcal{L}(E)$  admet une unique valeur propre, disons  $\lambda$ , et l'on a  $E = G_{\lambda}(f) = E_{\lambda}(f)$ .

Supposons la propriété vraie en dimension strictement inférieure à n et considérons un espace E de dimension n et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Comme E est un espace vectoriel complexe, f admet une valeur propre, disons  $\lambda_1$  et la question 36 montre que  $E = G_{\lambda_1}(f) \oplus F$  avec  $F = \operatorname{Im}(f - \lambda_1 \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_1)}$ . Comme  $(f - \lambda_1 \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_1)}(f)$  commute avec f, F est stable par f et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, puisque, d'après la question 35,  $G_{\lambda_1}(f) \supset E_{\lambda_1}(f)$  est de dimension strictement positive. On a donc à ce stade  $E = G_{\lambda_1}(f) \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f_{\parallel f})} G_{\lambda}(f_{\parallel F})$ .

Il est immédiat que  $\operatorname{Sp}(f_{\parallel F}) \subset \operatorname{Sp}(f)$  et que  $G_{\lambda}(f_{\parallel F}) \subset G_{\lambda}(f)$ . Soit réciproquement  $x \in G_{\lambda}(f)$ . On peut écrire  $x = x_1 + \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f_{\parallel F})} x_{\lambda}$  avec  $x_1 \in G_{\lambda_1}(f)$  et  $x_{\lambda} \in G_{\lambda}(f_{\parallel F}) \subset G_{\lambda}(f)$ . D'après la question 37, les  $G_{\lambda}(f)$  sont en somme

directe, donc  $x_1 = x_\mu = 0_E$  pour tout  $\mu \in \operatorname{Sp}(f_{\parallel F}) \setminus \{\lambda\}$  et l'on a donc bien  $G_{\lambda}(f_{\parallel F}) \subset G_{\lambda}(f)$ . Enfin, la décomposition  $E = G_{\lambda_1}(f) \oplus F$  en une somme de deux sous-espaces stables donne  $\operatorname{Sp}(f) = \{\lambda_1\} \cup \operatorname{Sp}(f_{\parallel f})$ , réunion disjointe comme il a déjà été dit. On a donc bien  $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} G_{\lambda}(f)$ .

- $\mathbf{Q} \ \mathbf{39.} \quad \text{On tire de la question précédente que } \mathrm{Sp} \left( f_{\parallel G_{\lambda}(f)} \right) = \{ \lambda \}, \text{ d'où } \chi_f = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X \lambda)^{\dim G_{\lambda}(f)}.$
- **Q 40.** D'après la question 38 et la stabilité des sous-espaces caractéristiques de f par f, il suffit de montrer que  $(X \lambda)^{\dim G_{\lambda}(f)}$  est annulateur de  $f_{\parallel G_{\lambda}(f)}$ . Par construction,  $f \lambda \operatorname{id}_E$  induit sur  $G_{\lambda}(f)$  un endomorphisme nilpotent d'indice  $p(\lambda)$ . D'après la question 35, la suite  $(\dim(f \lambda \operatorname{id}_E)^k)_{0 \le k \le p(\lambda)}$  est strictement croissante. Sa longueur ne peut donc excéder  $\dim G_{\lambda}(f) + 1$ , soit  $p(\lambda) \le \dim G_{\lambda}(f)$ , ce qui montre le théorème de Cayley-Hamilton sur ces sous-espaces.
- **Q 41.** Pour  $f \in \mathcal{L}(E)$ , la question 38 donne la décomposition en somme directe de sous-espaces stables  $E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(f)} G_{\lambda}(f)$ . On a vu dans cette même question que  $\operatorname{Sp}\left(f_{\parallel G_{\lambda}(f)}\right) = \{\lambda\}$ , d'où  $\operatorname{Sp}\left(f_{\parallel G_{\lambda}(f)} \lambda \operatorname{id}_{G_{\lambda}(f)}\right) = \{0\}$ . D'après  $A \in \operatorname{Sp}(f)$

la question 10,  $f_{\parallel G_{\lambda}(f)} - \lambda \operatorname{id}_{G_{\lambda}(f)}$  est donc nilpotent et on peut lui appliquer à sa matrice dans une base quelconque la question 25. Pour toute valeur propre  $\lambda$  de f, il existe donc une partition  $\sigma(\lambda)$  et une base de  $G_{\lambda}(f)$  dans laquelle la matrice de  $f_{\parallel G_{\lambda}(f)} - \lambda \operatorname{id}_{G_{\lambda}(f)}$  est  $N_{\sigma(\lambda)}$ . Dans cette même base, la matrice de  $f_{\parallel G_{\lambda}(f)}$  est donc  $\lambda I_{\dim G_{\lambda}(f)} + N_{\sigma(\lambda)}$ . On peut conclure :

**Théorème.** Si u est un endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie, il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme  $\lambda I_k + N_k$ .

Dans tout le problème, on n'a utilisé de  $\mathbb{C}$  que la propriété de d'Alembert-Gauß. Ainsi, la réduction de Jordan est valable pour tout endomorphisme trigonalisable.