DMS 3 - PSI* — 2025-2026 — Corrigé

Problème 2, Centrale-Supélec 2019, PSI, modifié

On pose $J_1 = (0) \in \mathscr{M}_1(\mathbb{C})$ et, pour un entier $\alpha \geqslant 2$, $J_\alpha = \sum_{i=1}^{\alpha-1} E_{i+1,i} \in \mathcal{T}_\alpha^-(\mathbb{C})$.

I. Premiers résultats

I.A — Réduction des endomorphismes nilpotents en dimension 2

Dans cette sous-partie, E est un plan vectoriel complexe. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice p.

Q 1. Si $p = 1$, cela signifie par définition que $u^1 = u = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On suppose désormais que $p \geqslant 2$.

Q 2. Par minimalité de p, $u^{p-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc il existe un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$.

Q 3. Soit $(\alpha_k)_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \in \mathbb{C}^p \setminus \{0_{\mathbb{C}^p}\}$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(x) = 0$. Notons $r = \min\left\{k \in [\![0, p-1]\!]\,;\ \alpha_k \neq 0_{\mathbb{C}}\right\}$. Ce minimum existe, puisque l'ensemble considéré est non vide par hypothèse. En composant $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(x) = \sum_{k=r}^{p-1} \alpha_k u^k(x)$ par u^{p-1-r} et en tenant compte de ce que $u^m(x) = 0_E$ pour tout $m \geqslant p$, il vient

$$\sum_{k=r}^{p-1} \alpha_k u^{p-1-r+k}(x) = \alpha_r u^{p-1}(x) + \sum_{k=r+1}^{p-1} \alpha_k u^{p-1-r+k}(x) = \alpha_r u^{p-1}(x) + \sum_{k=r+1}^{p-1} 0_E = \alpha_r u^{p-1}(x) = 0_E,$$

d'où $\alpha_r = 0_{\mathbb{C}}$, puisque $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. On obtient ainsi une contradiction avec le fait que les α_k ne sont pas tous nuls, ce qui montre que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leqslant k \leqslant p-1}$, qui est de cardinal p, est libre. En dimension 2, une famille libre est de cardinal au plus 2, donc $p \leqslant 2$. Comme on a supposé que $p \geqslant 2$, il vient $p = 2$.

Q 4. D'après la question précédente, on a $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Or,

$$u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \iff \forall x \in E\colon u(u(x)) = 0_E \iff \mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u) \qquad \therefore \qquad \dim \mathrm{Im}(u) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(u).$$

Par ailleurs, le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Ker}(u) + \dim \mathrm{Im}(u) = \dim E = 2$ et $p = 2$ montre que $\mathrm{Ker}(u) \neq E$, soit $\dim \mathrm{Ker}(u) \leqslant 1$. La seule possibilité est $\dim \mathrm{Ker}(u) = \dim \mathrm{Im}(u) = 1$, ce qui, associé à l'inclusion $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, assure l'égalité, soit $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

On peut aussi se passer du théorème du rang et utiliser la question précédente, qui donne une base de E de la forme $(x, u(x))$: soit $E \ni y = \alpha x + \beta u(x)$. Si $y \in \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(y) = \alpha u(x) + \beta u^2(x) = \alpha u(x) = 0_E$, d'où $\alpha = 0_{\mathbb{C}}$, puisque $u(x) \neq 0_E$. Ainsi, $y = u(\beta x) \in \mathrm{Im}(u)$, ce qui donne l'inclusion inverse $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Im}(u)$ et donc l'égalité.

Q 5. La question 3 donne une base de la forme $\mathscr{B} = \big(x, u(x)\big)$. Dans cette base, $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(u) = J_2$. Ce qui donne, en passant, une démonstration très efficace de 4 (bon, il faut intervertir les questions).

Q 6. On calcule $\chi_{J_2} = X^2$ (cas $p = 2$), qui est aussi le polynôme caractéristique de l'endomorphisme nul (cas $p = 1$). Or, E étant de dimension 2, on a $\chi_u = X^2 - \mathrm{tr}(u)X + \det(u)$ pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$, d'où $\mathrm{tr}(u) = \det(u) = 0$.

Réciproquement, si $\chi_u = X^2$, le théorème de Cayley-Hamilton donne $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$, donc u est nilpotent. En dimension 2, les endomorphismes nilpotents de E sont donc exactement ceux de trace et de déterminant nuls.

I.B — Réduction des endomorphismes nilpotents d'indice 2 en dimension n

On suppose dans cette sous-partie que $n \geqslant 3$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice 2. On pose $r = \mathrm{rg}(u)$.

Q 7. On a déjà fait la remarque à la question 4 : $u^2 = 0_{\mathscr{L}(E)}$ équivaut à $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$, et c'est indépendant de la dimension. Par ailleurs, le théorème du rang donne ici $\dim \mathrm{Ker}(u) = n-r$ et l'inclusion entraîne $\dim \mathrm{Im}(u) \leqslant \dim \mathrm{Ker}(u)$, soit $r \leqslant n - r$ et, donc, $2r \leqslant n$.

Q 8. Soit $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$, qui est par hypothèse de dimension r, ce qui entraîne par le théorème du rang que $n = 2r$. Pour $k \in [\![1, r]\!]$, soit e_k tel que $u(e_k) = f_k$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$. L'image de $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ par u étant une famille libre, $(e_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$ est libre. De plus, $u_{|G}$ est un application injective car

$$\forall(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in \mathbb{C}^r : u\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i f_i = 0_E \iff \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_r = 0_{\mathbb{C}} \iff \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i = 0_E.$$

Ainsi, $G \cap \mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, ce qui montre que G et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe et supplémentaires par dimension. On a montré que $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)\big)$ est une base de E. Il est clair que la matrice de u dans cette base est $\mathrm{Diag}(J_2, J_2, \dots, J_2)$.

On peut aussi construire la base de manière un peu différente : par hypothèse, $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$ et le théorème du rang donne $n = 2r$. Soit F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$ dans E. La forme géométrique du théorème du rang assure que u induit par restriction un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}(u)$. Soit alors $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ une base de F. Alors, $\big(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(u)$ et, comme $E = F \oplus \mathrm{Im}(u)$, la concaténation des deux familles donne une base de E, qu'il est loisible de permuter pour obtenir $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)\big)$.

Q 9. On suppose maintenant que $\mathrm{Im}(u) \neq \mathrm{Ker}(u)$, soit en fait $\mathrm{Im}(u) \subsetneq \mathrm{Ker}(u)$ d'après la question 7. On commence par reprendre la construction de la question 8 avec $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ une base de $\mathrm{Im}(u)$ et $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_r)$ avec $u(e_k) = f_k$ pour tout $k \in [\![1, r]\!]$; la famille $(e_1, e_2, \dots, e_r)$ est libre et les sous-espaces G et $\mathrm{Ker}(u)$ sont en somme directe.

En notant que le théorème du rang donne $\dim \mathrm{Ker}(u) = n - r$, on a $E = G \oplus \mathrm{Ker}(u)$ et l'on peut compléter $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ en une base $(f_1, f_2, \dots, f_r, v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ de $\mathrm{Ker}(u)$, ce qui donne une base de E, adaptée à cette décomposition en somme directe, de la forme

$$\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}\big),$$

dans laquelle la matrice de u est

$$\mathrm{Diag}(J_2, J_2, \dots, J_2, 0_{n-2r}) = \mathrm{Diag}(\underbrace{J_2, \dots, J_2}_{\#r}, \underbrace{J_1, \dots, J_1}_{\#n-2r}).$$

On peut également reprendre la construction alternative, avec F un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u) \supset \mathrm{Im}(u)$. Alors, u induit à nouveau un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}(u)$, qui envoie une base de F, $(e_1, e_2, \dots, e_r)$, sur $\big(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r)\big)$, base de $\mathrm{Im}(u)$, que l'on peut compléter en $\big(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r), v_1, \dots, v_{n-2r}\big)$, base de $\mathrm{Ker}(f)$, puisque $\dim \mathrm{Ker}(u) = n - r$. Il suffit de réordonner la base pour obtenir

$$\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}\big),$$

I.C — Valeurs propres, polynôme caractéristique, polynômes annulateurs d'une matrice nilpotente

Dans cette sous-partie, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geqslant 1$.

Q 10. Notons, dans l'ordre, (i), (ii) et (iii) les trois propositions.

Les racines du polynôme caractéristique de A étant exactement l'ensemble de ses valeurs propres complexes, (iii) est équivalente à (ii) (sur $\mathbb{R}$, ce qui est ici hors sujet, on n'a que $(iii) \Rightarrow (ii)$ car les valeurs propres non réelles de A figurent comme racines de son polynôme caractéristique).

Par ailleurs, le théorème de Cayley-Hamilton montre que si $\chi_A = X^n$, alors $A^n = 0$, donc A est nilpotente. Supposons enfin A nilpotente. Alors, A admet un polynôme annulateur de la forme X^p, dont 0 est l'unique racine, d'où

$\mathrm{Sp}(A) \subset \{0_{\mathbb{C}}\}$. Comme $\mathrm{Sp}(A) \neq \varnothing$ (A est complexe), on a donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

Q 11. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ à la fois nilpotente et diagonalisable est semblable à la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont nuls par la question 10, donc à la matrice nulle. La classe de similitude de la matrice nulle étant réduite à elle même, celle-ci est la seule matrice à la fois nilpotente et diagonalisable.

Q 12. Si A est nilpotente, elle est trigonalisable et donc semblable à une matrice triangulaire inférieure ayant les valeurs propres de A, donc des zéros, sur la diagonale. Réciproquement, une matrice triangulaire de diagonale nulle admet X^n pour polynôme caractéristique et est donc nilpotente d'après la question 10.

Dans les trois questions suivantes, A est nilpotente d'indice p.

Q 13. Comme A est nilpotente d'indice p, X^p est un polynôme annulateur de A. Corrélativement, pour tout $Q \in \mathbb{C}[X]$, $(X^p Q)(A) = A^p Q(A) = 0$, donc tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ multiple de X^p est un polynôme annulateur de A.

Q 14. Réciproquement, soit P un polynôme annulateur de A. Comme 0 est valeur propre de A, 0 est racine de P. Notons m son ordre de multiplicité. Par définition, $P = X^m Q$ avec $Q(0) \neq 0$. Pour $Q = \prod_{i=1}^{s} (X - \alpha_i)$, $Q(A) = \prod_{i=1}^{s} (A - \alpha_i I_n)$ est le produit (commutatif) de s matrices inversibles, puisque, les α_i étant non nuls, aucun n'est valeur propre de A. Ainsi, $Q(A)$ est inversible.

Q 15. Poursuivons le raisonnement de la question précédente : on écrit $A^m Q(A) = 0$ et l'on multiplie par $Q(A)^{-1}$, ce qui donne $A^m = 0$, d'où $m \geqslant p$ par minimalité de l'indice de nilpotence, d'où $P = X^p (X^{m-p} Q)$. On peut conclure : les polynômes annulateurs de A sont les multiples de X^p. Autrement dit, $\mathrm{Ann}(A) = X^p \mathbb{C}[X]$.

I.D — Racines carrées de matrices nilpotentes

Pour une matrice $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ donnée, on dit qu'une matrice $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est une racine carrée de V si $R^2 = V$.

Q 16. Soit $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = J_3$. On calcule $R^4 = J_3^2 = E_{3,1}$ et $R^6 = R^4 \times R^2 = E_{3,1}(E_{2,1} + E_{3,2}) = 0$. Ainsi, R est nilpotente, donc $R^3 = 0$ d'après la question 10, ce qui contredit le calcul de R^4. Aussi la matrice J_3 n'admet-elle pas de racine carrée.

En général, soit $V \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente d'indice p et $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = V$.

Q 17. Par hypothèse, $V^p = R^{2p} = 0$, donc R est nilpotente. Comme $V^{p-1} = R^{2p-2} \neq 0$, l'indice de nilpotence de R vaut au moins $2p - 1$, ce qui n'est possible que si $2p - 1 \leqslant n$ en vertu de la question 10, soit $p \leqslant \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$, p étant évidemment entier.

Q 18. On note dans cette question u_n l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à J_n et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. On a ainsi $u_n(e_i) = e_{i+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $u_n(e_n) = 0$. En itérant, il vient $u_n^k(e_i) = e_{i+k}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-k$ et $u_n^k(e_i) = 0$ pour $n-k+1 \leqslant i \leqslant n$. Autrement dit, $J_n^k = \sum_{i=1}^{n-k} E_{i+k,i}$. Il s'ensuit que l'indice de nilpotence de J_n est n.

Corrélativement, J_n^2 est d'indice de nilpotence $\left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.

II. Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents, partitions

II.A — Réduction des matrices nilpotentes

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent. Pour $x \in E$, on note $C_u(x) = \operatorname{Vect}\left(u^k(x)\,;\ k \in \mathbb{N}\right)$.

Q 19. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u\big(u^k(x)\big) = u^{k+1}(x) \in C_u(x)$, donc $C_u(x)$ est stable par u. Comme $u^p(x) = 0_E$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^*\,;\ s^k(x) = 0_E\}$ est non vide et admet donc un plus petit élément, noté $s(x)$. D'après la preuve de la question 3 (qui n'utilise pas au début le fait que l'espace est de dimension 2), la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{s(x)-1}(x)\big)$ est libre et c'est donc une base de $C_u(x)$, puisque $u^k(x) = 0_E$ pour tout $k \geqslant s(x)$. Enfin, dans cette base, la matrice de $u_{\| C_u(x)}$ est $J_{s(x)}$.

L'objectif de cette sous-partie est de démontrer la propriété

$\left(\mathscr{H}_p\right)$: « Pour tout $\mathbb{C}$-e.v. E de dimension finie et tout endomorphisme u de E nilpotent d'indice p, il existe des vecteurs non nuls $a_1, a_2, \dots, a_k$ de E tels que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} C_u(a_i)$. »

Q 20. Si u est d'indice de nilpotence 1, u est l'endomorphisme nul, comme on la vu à la question 1. Alors, pour tout $x \neq 0_E$, on a $C_u(x) = \operatorname{Vect}(x)$. Ainsi, si $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ est une base de E, on a $E = C_u(a_1) \oplus C_u(a_2) \oplus \cdots \oplus C_u(a_n)$, ce qui montre $\left(\mathscr{H}_1\right)$.

Les questions 8 et 9 montrent qu'il existe une base de E de la forme $\big(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}\big)$ avec $(v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}) \in \big(\operatorname{Ker}(u)\big)^{n-2r}$, la question 8 correspondant au cas $n = 2r$ (et, donc, à l'absence de vecteurs v_i dans la base ci-dessus). Comme u est d'indice de nilpotence 2, on a $C_u(e_i) = \operatorname{Vect}\big(e_i, u(e_i)\big)$ pour $i \in [\![1, r]\!]$ et l'on a par ailleurs $C_u(v_i) = \operatorname{Vect}(v_i)$ pour $i \in [\![1, n-2r]\!]$. Ainsi, en posant $k = n - r$, $a_i = e_i$ pour $i \in [\![1, r]\!]$ et $a_i = v_{r-i}$ pour $i \in [\![r+1, n-r]\!]$, on a bien $E = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{k} C_u(a_i)$.

Q 21. C'est un fait général que tout endomorphisme, ici, u, induit sur $\operatorname{Im}(u)$ un endomorphisme. Pour tout vecteur $y = u(x) \in \operatorname{Im}(u)$, on a $u^{p-1}(y) = u^p(x) = 0_E$, ce qui montre que $u_{\| \operatorname{Im}(u)}$ est nilpotent, d'indice de nilpotence $q \leqslant p-1$. Enfin, il existe un vecteur x_0 tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0_E$, soit $u^{p-2}(u(x_0)) \neq 0_E$, d'où $q > p-2$. Finalement, $u_{\| \operatorname{Im}(u)}$ est nilpotent, d'indice de nilpotence $p-1$.

Q 22. La récurrence a été initialisée à la question 20. La question 21 incite à effectuer une récurrence simple et à appliquer $\left(\mathscr{H}_{p-1}\right)$ à $u_{\| \operatorname{Im}(u)}$. Dans le cas du passage de $\left(\mathscr{H}_1\right)$ à $\left(\mathscr{H}_2\right)$, cela suit la première des deux approches proposées aux questions 8 et 9). On avait alors choisi une base de $\operatorname{Im}(u)$ (les vecteurs f_k du corrigé), 2) pris des images réciproques des vecteurs de cette base (les vecteurs e_k, 3) montré que leur concaténation formait une famille libre, 4) justifié que l'on pouvait compléter ces $2\operatorname{rg}(u)$ vecteurs en une base de E avec des vecteurs de $\operatorname{Ker}(u)$. Cela suggère la démonstration ci-dessous.

(1) L'hypothèse de récurrence permet de décomposer l'image de u sous la forme $\operatorname{Im}(u) = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{k} C_u(b_i)$.

(2) Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, comme $b_i \in \operatorname{Im}(u)$, il existe un vecteur a_i tels que $u(a_i) = b_i$. On a alors $s(a_i) = s(b_i) + 1$ et $C_u(a_i) = \operatorname{Vect}(a_i) \oplus C_u(b_i)$ d'après la question 20.

(3) Soit $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \displaystyle\prod_{i=1}^{k} C_u(a_i)$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} x_i = 0$. En composant par u, il vient $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} u(x_i) = 0$ et, comme $u(x_i) \in C_u(b_i)$ et que ces espaces sont en somme directe par hypothèse, $u(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. Ainsi, $x_i \in \operatorname{Vect}(u^{s(b_i)-1}) \in C_u(b_i)$ et, en utilisant à nouveau le caractère directe de la somme de $C_u(b_i)$, il vient $x_i = 0$. Ainsi, la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} C_u(a_i)$ est directe.

(4) Posons $F = \bigoplus_{i=1}^{k} C_u(a_i)$. D'après ce qui précède, $\dim F = \mathrm{rg}(u) + k$. De plus, $F \cap \mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Vect}\left(u^{s(a_i)-1}(a_i)\right)$ est de dimension k, donc la formule de Graßmann donne

$$\dim(F + \mathrm{Ker}(u)) = \dim F + \dim \mathrm{Ker}(u) - \dim(F \cap \mathrm{Ker}(u)) = (\mathrm{rg}(u) + k) + (n - \mathrm{rg}(u)) - k = n,$$

ce qui montre que $E = F + \mathrm{Ker}(u)$.

On peut ainsi compléter F en un supplémentaire G de E formé de vecteurs de $\mathrm{Ker}(u)$ et l'on peut appliquer $\left(\mathscr{H}_1\right)$ à $u_{\|G}$, ce qui complète la démonstration de $\left(\mathscr{H}_p\right)$.

Q 23. Dans une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{\mathsf{k}} C_u(a_i)$, la matrice de u est diagonale par blocs, les blocs diagonaux étant les matrices de $u_{\|C_u(a_i)}$. Si l'on choisit de plus une base de $C_u(a_i)$ de la forme $\left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right)$, alors la matrice de u dans cette base sera $\mathrm{Diag}(J_{s(a_1)}, J_{s(a_2)}, \ldots, J_{s(a_k)}\big)$.

II.B — Partitions d'entiers

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle *classe de similitude* de A l'ensemble des matrices semblables à A. On s'intéresse ici au nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

En théorie des nombres, on appelle *partition de l'entier* $n \in \mathbb{N}^*$ toute suite finie $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ avec $k \geqslant 1$ telle que

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k \quad \& \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = n.$$

On note Γ_n l'ensemble des partitions de l'entier n. Ainsi, $\Gamma_1 = \{(1)\}$, $\Gamma_2 = \{(2), (1,1)\}$, $\Gamma_3 = \{(3), (2,1), (1,1,1)\}$.

Enfin, pour tout partition $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) \in \Gamma_n$, on note $N_\sigma = \mathrm{Diag}\left(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \ldots, J_{\alpha_k}\right)$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente.

Q 24. La question 23 montre qu'il existe une base dans laquelle la matrice de ϕ_A, l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A, est $\mathrm{Diag}(J_{s(a_1)}, J_{s(a_2)}, \ldots, J_{s(a_k)}\big)$. En ordonnant $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ par ordre décroissant de $(s(a_i))_{1\leqslant i\leqslant k}$, on obtient bien une partition $\sigma \in \Gamma_n$ telle que A soit semblable à la matrice N_σ.

Dans la suite, on fixe une telle partition $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$. Pour $j \in \mathbb{N}$, on note $r_j = \mathrm{rg}(A^j)$. On note enfin m_j le nombre de termes de la partition σ égaux à j.

Q 25. On a montré à la question 18 qu'avec $J_q = \sum_{i=1}^{q-1} E_{i+1,i} \in \mathscr{M}_q(\mathbb{C})$, $J_q^m = \sum_{i=1}^{q-m} E_{i+m,i}$, qui est clairement de rang $q - m$ si $m \leqslant q$ et de rang nul si $m \geqslant q$. Autrement dit, $\mathrm{rg}(J_q^k) = \max(0, q-k)$.

Comme $N_\sigma = \mathrm{Diag}\left(J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \ldots, J_{\alpha_k}\right)$, $N_\sigma^j = \mathrm{Diag}\left(J_{\alpha_1}^j, J_{\alpha_2}^j, \ldots, J_{\alpha_k}^j\right)$ et, le rang d'une matrice diagonale par blocs étant la somme des rangs de ses blocs diagonaux, $r_j = \sum_{i=1}^{k} \max(0, \alpha_i - j)$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Q 26. On a montré à la question précédente que $\mathrm{rg}(J_q^j) = \max(0, q-j)$. Corrélativement, le passage de J_q^{j-1} à J_q^j diminue le degré de 1 si $\mathrm{rg}(J_q^{j-1}) > 0$ et ne le modifie pas sinon. Autrement dit, $\mathrm{rg}(J_q^{j-1}) - \mathrm{rg}(J_q^j)$ vaut 1 si $j \leqslant q$ et 0 si $j > q$. En sommant,

$$r_{j-1} - r_j = \sum_{i=1}^{k} \left[\mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^{j-1}) - \mathrm{rg}(J_{\alpha_i}^j)\right] = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant k \\ j\leqslant \alpha_i}} 1 = \#\big\{i \in [\![1,k]\!]\,;\ \alpha_i \geqslant j\big\}$$

compte le nombre d'entiers de la partition σ au moins égaux à j. Il s'ensuit

$$\begin{aligned} m_j = \#\{i \in [\![1,k]\!]\,;\ \alpha_i = j\} &= \#\{i \in [\![1,k]\!]\,;\ \alpha_i \geqslant j\} - \#\{i \in [\![1,k]\!]\,;\ \alpha_i \geqslant j+1\} \\ &= (r_{j-1} - r_j) - (r_j - r_{j+1}) = r_{j+1} - 2r_j + r_{j-1}. \end{aligned}$$

Q 27. L'existence de la partition $\sigma \in \Gamma_n$ a été établie à la question 25. Dans la mesure où une partition est entièrement décrite par la suite $(m_j)_{j\geqslant 1}$ et que ces valeurs sont des fonctions du rang des puissances de A, il y a unicité.

Par ailleurs, le nombre de partitions d'un entier n est fini (il est trivialement majoré par n^n, puisque tant sa longueur que ses éléments sont compris entre 1 et n). Aussi le nombre de classes de similitude de matrices nilpotentes dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est-il fini, égal au nombre de partitions de n.

Ce nombre de partitions a été largement étudié. Hardy et Ramanujan ont notamment montré que le nombre de partitions de n, classiquement noté $p(n)$, vérifie $p(n) \sim \dfrac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\dfrac{2n}{3}}\right)$.

II.C — Deux applications

Q 28. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note que $L_2(A) = 0$ et que $L_3(A) = L_4(A)$. Par ailleurs, il est immédiat que $\big(L_1(A), L_3(A), L_5(A)\big)$ est libre, ce qui montre que $r_1 = \mathrm{rg}(A) = 3$. On note ensuite que $C_1(A^2) = C_5(A^2) = 0$, $C_2(A^2) = -C_1(A) + C_3(A) + C_4(A) + C_5(A) = C_5(A)$ et $C_k(A^2) = \pm C_5(A)$ pour $k \in \{3,4\}$, ce qui assure que $r_2 = \mathrm{rg}(A^2) = 1$ et que A est nilpotente d'indice 3. Ainsi, $(r_0, r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) = (5, 3, 1, 0, 0)$, d'où $m_1 = 0$ et $m_2 = m_3 = 1$, ce qui donne $\sigma = (3, 2)$ et montre que A est semblable à $\mathrm{Diag}(J_3, J_2)$. Notons au passage que le résultat est raisonnable, vu que $2 + 3 = 5$...

Cela n'était pas demandé, mais on peut calculer la matrice de passage (c'est intéressant si l'on veut bien comprendre le fonctionnement de la réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents). Pour ce faire, on revient aux résultats de la partie II.A et, plus précisément, à la construction de la question 22. On pose $u = \phi_A$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^5$ canoniquement associé à A. On note $(E_i)_{1\leqslant i\leqslant 5}$ la base canonique de $\mathbb{C}^5$. Les calculs ci-dessus donnent $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(E_1, E_5, E_3 + E_4)$ et $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Vect}(E_1)$. On peut donc écrire $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Vect}(E_1) = C_u(E_1)$.

On a vu ensuite que $u(-E_5) = E_1$ et l'on constate que $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Vect}(E_3 + E_4)$, soit

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(-E_5, E_1) \oplus \mathrm{Vect}(E_3 + E_4) = C_u(-E_5) \oplus C_u(E_3 + E_4).$$

Enfin, $u(2E_5 - E_4) = -E_5$ et $u(E_2 - E_4 + E_5) = E_3 + E_4$ donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^5 &= \mathrm{Vect}(2E_5 - E_4, -E_5, E_1) \oplus \mathrm{Vect}(E_2 - E_4 + E_5, E_3 + E_4) \\ &= C_u(2E_5 - E_4) \oplus C_u(E_2 - E_4 + E_5) \end{aligned} \qquad \therefore \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Un peu de code pour vérifier (utile pour l'oral de Centrale). La matrice `J` est la matrice $\mathrm{Diag}(J_3, J_2)$.

```
import numpy as np
A = np.zeros((5, 5))
A[0, :] = [0, -1, 2, -2, -1]
A[4, 1:4] = [1, -1, 1]
A[2:4, 1] = [1, 1]
```

```
P = np.zeros((5, 5))
P[0, 2] = P[1, 3] = P[2, 4] = 1
P[3, :] = [-1, 0, 0, -1, 1]
P[4, :] = [2, -1, 0, 1, 0]

J = np.linalg.inv(P).dot(A).dot(P)
```

Q 29. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice nilpotente. Comme $\mathrm{rg}(A^j) = \mathrm{rg}(2^j A^j) = \mathrm{rg}\left((A^\top)^j\right)$, les trois matrices sont semblables à la même réduite de Jordan N_σ et donc semblables.

Comme $AX = \lambda X \iff (2A)X = (2\lambda)X$, l'application $x \mapsto 2x$ réalise une bijection de $\mathrm{Sp}(A)$ sur $\mathrm{Sp}(2A)$. Si A et $2A$ sont semblables, elles ont même spectre, ce qui implique que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors 2λ et, par une récurrence immédiate, $2^m\lambda$ est valeur propre de A pour tout m. Ainsi, si A possédait une valeur propre non nulle, son spectre serait infini, ce qui n'est pas possible. On a ainsi montré que $\mathrm{Sp}(A) \subset \{0_\mathbb{C}\}$, donc que $\mathrm{Sp}(A) = \{0_\mathbb{C}\}$, donc que A est nilpotente par la question 10.

II.D — Un algorithme de calcul du nombre de partitions de n

Q 30. On calcule

$$\Gamma_4 = \{(4), (3,1), (2,2), (2,1,1), (1,1,1,1)\} \quad \& \quad \Gamma_5 = \{(5), (4,1), (3,2), (3,1,1), (2,2,1), (2,1,1,1,1), (1,1,1,1,1)\}.$$

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$j=1$	1	1	1	1	1
$j=2$	0	2	2	3	3
$j=3$	0	0	3	4	5
$j=4$	0	0	0	5	6
$j=5$	0	0	0	0	7

Pour n et j entiers naturels non nuls, on note $Y_{n,j}$ l'ensemble des partitions de n dont le premier terme α_1 est inférieur ou égal à j et $y_{n,j}$ le cardinal de cet ensemble. Par convention, on pose $y_{0,0} = 1$ et $y_{n,0} = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Q 31. Par définition, $Y_{n,1} = \{(1, 1, \dots, 1)\}$, d'où $y_{n,1} = 1$.

On se propose de montrer que, pour $2 \leqslant j \leqslant n$, alors $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,\,\min(j,n-j)}$.

Q 32. Pour $j = n$, l'identité à prouver est $y_{n,n} = y_{n,n-1} + y_{0,0} = y_{n,n-1} + 1$, qui vient de $\Gamma_n = Y_{n,n} = \{(n)\} \uplus Y_{n,n-1}$.

Q 33. Pour $2 \leqslant j < n$, l'ensemble $Y_{n,j}$ est la réunion disjointe de $Y_{n,j-1}$ et des partitions de n de la forme $\sigma = (j, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$, à qui l'on peut associer bijectivement les partitions $(\alpha_2, \dots, \alpha_k)$ de $n-j$ vérifiant $\alpha_2 \leqslant j$, soit l'ensemble $Y_{n-j,j}$. On en déduit que $y_{n,j} = y_{n,j-1} + y_{n-j,j}$.

De plus, il est clair que si $\sigma = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ est une partition de n, alors $\alpha_1 \leqslant n$, ce qui s'écrit $Y_{n,k} = Y_{n,\min(n,k)}$. En particulier, $Y_{n-j,j} = Y_{n-j,\,\min(n-j,j)}$, d'où $y_{n-j,j} = y_{n-j,\,\min(n-j,j)}$, ce qui termine la démonstration de la formule.

Q 34. Une première version, naïve, consiste à programmer simplement la récurrence. On utilise quand même une sous-fonction, vu que la fonction englobante n'a qu'un paramètre alors que la relation de récurrence est à deux termes. Cette version est d'une complexité catastrophique (on pourra la tester pour $n = 10$, 50, puis 100).

```
def partitions_moisies(n):
    def y(n, j):
        if n == j == 0:
            return 1
        elif n == 0:
            return 0
        elif j == 1:
            return 1
        return y(n, j-1) + y(n - j, min(j, n-j))
    return y(n, n)
```

La relation de récurrence indique clairement qu'une programmation dynamique par mémoïsation est ici pertinente. La forme du programme est standard, avec sa sous-fonction récursive remplissant un dictionnaire en mode *top-down*.

```
def partitions_dyn(n):
    d = {(0, 0): 1}
    for k in range(1, n+1):
        d[(k, 0)], d[(k, 1)] = 0, 1
    def y(n, j):
        if (n, j) not in d:
            d[(n, j)] = y(n, j-1) + y(n - j, min(j, n-j))
        return d[(n, j)]
    return y(n, n)
```

III. Vecteurs propres généralisés, réduction de Jordan générale

Cette partie ne figurait pas dans le problème de Centrale. Elle est essentiellement tirée du chapitre 8 de Sheldon Axler, *Linear Algebra done right*, Springer.

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Pour une valeur propre λ de f et $k \in \mathbb{N}$, on note $G_\lambda^{(k)}(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)^k$ et $G_\lambda(f) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} G_\lambda^{(k)}(f)$. On appelle *vecteur propre généralisé* de f associé à λ l'ensemble des vecteurs non nuls de $G_\lambda(f)$. Les espaces $G_\lambda(f)$ sont appelés *sous-espaces caractéristiques* de f.

Q 35. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \operatorname{Ker}(g^k)$, on a $g^{k+1}(x) = g\big(g^k(x)\big) = g(0_E) = 0_E$, ce qui montre que la suite des espaces $\big(\operatorname{Ker}(g^k)\big)_{k\geqslant 0}$ est croissante au sens de l'inclusion. Corrélativement, la suite $\big(\dim \operatorname{Ker}(g^k)\big)_{k\geqslant 0}$ est une suite croissante d'entiers. Comme elle est majorée par $n = \dim E$, il existe donc un entier k telle que $\dim \operatorname{Ker}(g^{k+1}) = \dim \operatorname{Ker}(g^k)$, d'où $\operatorname{Ker}(g^{k+1}) = \operatorname{Ker}(g^k)$ du fait de l'inclusion $\operatorname{Ker}(g^{k+1}) \supset \operatorname{Ker}(g^k)$.

Montrons qu'alors, $\operatorname{Ker}(g^{k+2}) = \operatorname{Ker}(g^{k+1})$. Comme $\operatorname{Ker}(g^{k+1}) \subset \operatorname{Ker}(g^{k+2})$, il suffit de montrer l'inclusion réciproque. Soit $x \in \operatorname{Ker}(g^{k+2})$. Alors, $g(x) \in \operatorname{Ker}(g^{k+1}) = \operatorname{Ker}(g^k)$, donc $x \in \operatorname{Ker}(g^{k+1})$.

Bilan : il existe un plus petit entier p tel que $\operatorname{Ker}(g^p) = \operatorname{Ker}(g^{p+1})$ et l'on a alors $\operatorname{Ker}(g^{p+k}) = \operatorname{Ker}(g^p)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Enfin, $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} \operatorname{Ker}(g^k)$ est une réunion croissante de s.e.v. de E égale à $\operatorname{Ker}(g^p)$ et est donc un sous-espace vectoriel de E.

Soit maintenant $\lambda \in \operatorname{Sp}(f)$. On applique ce qui précède à $g = f - \lambda\,\mathrm{id}_E$, ce qui donne (presque) le résultat. Il suffit de mentionner encore que $\{0_E\} \neq E_\lambda(f) \subset G_\lambda(f)$ pour en déduire que $G_\lambda(f)$ est un espace vectoriel de dimension au moins égale à 1 contenant l'espace propre $E_\lambda(f)$.

Q 36. On reprend le fil de la question précédente pour $g \in \mathscr{L}(E)$. Soit $y \in \operatorname{Ker}(g^{(p)}) \cap \operatorname{Im}(g^{(p)})$. Comme $y \in \operatorname{Im}(g^{(p)})$, il existe $x \in E$ tel que $g^p(x) = y$. Alors, $g^{2p}(x) = g^p(y) = 0_E$. Ainsi, $x \in \operatorname{Ker}(g^{2p}) = \operatorname{Ker}(g^p)$, soit $y = 0$. Il s'ensuit que $\operatorname{Ker}(g^p)$ et $\operatorname{Im}(g^p)$ sont en somme directe, donc supplémentaires par dimension en vertu du théorème du rang.

En appliquant, comme dans la question précédente, ce résultat à $g = f - \lambda\,\mathrm{id}_E$, il vient

$$E = \operatorname{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)^{p(\lambda)} \oplus \operatorname{Im}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)^{p(\lambda)} = G_\lambda(f) \oplus \operatorname{Im}(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)^{p(\lambda)}.$$

Q 37. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des valeurs propres de f deux à deux distinctes. Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \displaystyle\prod_{i=1}^{p} G_{\lambda_i}(f)$ une famille de vecteurs telle que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = 0_E$. On suppose qu'il existe $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $x_i \neq 0$. Comme $x_i \in G_{\lambda_i}(f)$, on peut poser $m = \min\big\{k \in \mathbb{N}^*\,;\; x_j \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_i\,\mathrm{id}_E)^k\big\}$. Par construction, $w_i = (f - \lambda_i\,\mathrm{id}_E)^{m-1}(x_i) \in E_{\lambda_i}(f) \setminus \{0_E\}$.

Soit alors $P = (X-\lambda_i)^{m-1} \prod\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant p\\ j\neq i}} (X-\lambda_j)^{p(\lambda_j)}$. Pour $j \in [\![1,p]\!] \setminus \{i\}$, la commutation des éléments de $\mathbb{C}[f]$ donne

$$\begin{aligned}
P(f)(x_j) &= (f-\lambda_i \operatorname{id}_E)^{m-1} \circ \left(\bigcirc_{\substack{1\leqslant r\leqslant p\\ r\notin\{i,j\}}} (f-\lambda_r \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_r)} \right) \circ (f-\lambda_j \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_j)}(x_j) \\
&= \left[(f-\lambda_i \operatorname{id}_E)^{m-1} \circ \left(\bigcirc_{\substack{1\leqslant r\leqslant p\\ r\notin\{i,j\}}} (f-\lambda_r \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_r)} \right) \right] (0_E) = 0_E.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, l'expression de w_i introduite ci-dessus donne

$$P(f)(x_i) = \left(\bigcirc_{\substack{1\leqslant r\leqslant p\\ r\neq i}} (f-\lambda_r \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_r)} \right)(w_i) = \prod_{\substack{1\leqslant r\leqslant p\\ r\neq i}} (\lambda_i-\lambda_r)^{p(\lambda_r)} w_i \qquad \therefore$$

$$x_1+x_2+\cdots+x_p = 0_E \Longrightarrow P(f)(x_1+x_2+\cdots+x_p) = P(f)(x_i) = \overbrace{\prod_{\substack{1\leqslant r\leqslant p\\ r\neq i}} (\lambda_i-\lambda_r)^{p(\lambda_r)}}^{\neq 0_{\mathbb{C}}} w_i = P(f)(0_E) = 0_E.$$

Le produit étant non nul, il vient $w_i = 0_E$, en contradiction avec le fait que w_i soit un vecteur propre. On a donc $x_i = 0_E$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Ainsi, les sous-espaces caractéristiques sont en somme directe.

Q 38. On raisonne par récurrence forte sur $n = \dim E$. En dimension 1, $f \in \mathscr{L}(E)$ admet une unique valeur propre, disons λ, et l'on a $E = G_\lambda(f) = E_\lambda(f)$.

Supposons la propriété vraie en dimension strictement inférieure à n et considérons un espace E de dimension n et $f \in \mathscr{L}(E)$. Comme E est un espace vectoriel complexe, f admet une valeur propre, disons λ_1, et la question 36 montre que $E = G_{\lambda_1}(f) \oplus F$ avec $F = \operatorname{Im}(f-\lambda_1 \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_1)}$. Comme $(f-\lambda_1 \operatorname{id}_E)^{p(\lambda_1)}(f)$ commute avec f, F est stable par f et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence, puisque, d'après la question 35, $G_{\lambda_1}(f) \supset E_{\lambda_1}(f)$ est de dimension strictement positive. On a donc à ce stade $E = G_{\lambda_1}(f) \oplus \left(\bigoplus\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f_{\|f})} G_\lambda(f_{\|F}) \right)$.

Il est immédiat que $\operatorname{Sp}(f_{\|F}) \subset \operatorname{Sp}(f)$ et que $G_\lambda(f_{\|F}) \subset G_\lambda(f)$. Soit réciproquement $x \in G_\lambda(f)$. D'après la décomposition de E ci-dessus, on peut écrire $x = x_1 + \sum\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f_{\|F})} x_\lambda$ avec $x_1 \in G_{\lambda_1}(f)$ et $x_\lambda \in G_\lambda(f_{\|F}) \subset G_\lambda(f)$. D'après la question 37, les $G_\lambda(f)$ sont en somme directe, donc $x_1 = x_\mu = 0_E$ pour tout $\mu \in \operatorname{Sp}(f_{\|F}) \setminus \{\lambda\}$ et l'on a donc bien $G_\lambda(f_{\|F}) \supset G_\lambda(f)$, d'où $G_\lambda(f_{\|F}) = G_\lambda(f)$ et $E = G_{\lambda_1}(f) \oplus \left(\bigoplus\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f_{\|f})} G_\lambda(f) \right)$. En particulier, $\operatorname{Sp}(f) = \{\lambda_1\} \uplus \operatorname{Sp}(f_{\|f})$, réunion disjointe. *In fine*, $E = \bigoplus\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f)} G_\lambda(f)$.

Q 39. On tire de la question précédente que $\operatorname{Sp}\left(f_{\|G_\lambda(f)}\right) = \{\lambda\}$, d'où $\chi_f = \prod\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f)} (X-\lambda)^{\dim G_\lambda(f)}$.

Q 40. D'après la question 38 et la stabilité des sous-espaces caractéristiques de f par f, il suffit de montrer que $(X-\lambda)^{\dim G_\lambda(f)}$ est annulateur de $f_{\|G_\lambda(f)}$. Par construction, $f-\lambda \operatorname{id}_E$ induit sur $G_\lambda(f)$ un endomorphisme nilpotent d'indice $p(\lambda)$. D'après la question 35, la suite $\left(\dim(f-\lambda \operatorname{id}_E)^k\right)_{0\leqslant k\leqslant p(\lambda)}$ est strictement croissante. Sa longueur ne peut donc excéder $\dim G_\lambda(f)+1$, soit $p(\lambda) \leqslant \dim G_\lambda(f)$, ce qui montre le théorème de Cayley-Hamilton sur ces sous-espaces.

Q 41. Pour $f \in \mathscr{L}(E)$, la question 38 donne la décomposition en somme directe de sous-espaces caractéristiques $E = \bigoplus\limits_{\lambda\in\operatorname{Sp}(f)} G_\lambda(f)$, les $G_\lambda(f)$ étant stables par f. On a vu dans cette même question que $\operatorname{Sp}\left(f_{\|G_\lambda(f)}\right) = \{\lambda\}$, d'où $\operatorname{Sp}\left(f_{\|G_\lambda(f)} - \lambda \operatorname{id}_{G_\lambda(f)}\right) = \{0\}$. D'après la question 10, $f_{\|G_\lambda(f)} - \lambda \operatorname{id}_{G_\lambda(f)}$ est donc nilpotent et on peut lui appliquer à sa matrice dans une base quelconque la question 25. Pour toute valeur propre λ de f, il existe donc une partition $\sigma(\lambda)$ et une base de $G_\lambda(f)$ dans laquelle la matrice de $f_{\|G_\lambda(f)} - \lambda\,\mathrm{id}_{G_\lambda(f)}$ est $N_{\sigma(\lambda)}$. Dans cette même base, la matrice de $f_{\|G_\lambda(f)}$ est donc $\lambda I_{\dim G_\lambda(f)} + N_{\sigma(\lambda)}$. On peut conclure :

Théorème. *Si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie, de polynôme caractéristique $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{n_\lambda}$, il existe des vecteurs $\left(a_i^{(\lambda)}\right)_{\substack{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)\\ 1\leqslant i\leqslant k(\lambda)}}$ avec $a_i^{(\lambda)} \in G_\lambda(u)$ tels que $E = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(f)} \bigoplus_{i=1}^{k(\lambda)} C_{u-\lambda\,\mathrm{id}_E}\left(a_i^{(\lambda)}\right)$.*

Matriciellement, il existe une base de E et des partitions $\sigma(\lambda) \in \Gamma(n_\lambda)$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs de la forme $\lambda I_{n(\lambda)} + N_{\sigma(\lambda)}$ (et donc, sans la précision des partitions, diagonale par blocs de la forme $\lambda I_q + J_q$ avec au moins un q par valeur propre). Cette forme est unique à permutation des blocs près.

Dans tout le problème, on n'a utilisé de $\mathbb{C}$ que la propriété de d'Alembert-Gauß. Ainsi, la *réduction de Jordan* est valable pour tout endomorphisme trigonalisable.