

Espaces vectoriels normés - Résumé

1. NORMES

Les espaces vectoriels normés, *e.v.n.* en abrégé, présentent une double structure ; algébrique comme espaces vectoriels et topologique comme espaces normés. Les e.v.n. généralisent les espaces euclidiens en ce qu'ils ne sont pas nécessairement de dimension finie, et surtout en ce que leur norme ne dérive pas nécessairement d'un produit scalaire. Dans un e.v.n., il y a les opérations vectorielles interne et externe, une notion de distance induite par la norme (d'où les concepts de limite et de continuité), mais pas, en général, de concept d'orthogonalité. Dans toute la suite, E est un $\mathbb{K}$ -e.v. sur le corps des scalaires $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Définition 1. Une norme sur E est une application $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant les trois axiomes suivants :

- i) si $x \in E$ et $\|x\| = 0_{\mathbb{R}}$, alors $x = 0_E$ (axiome de séparation) ;
- ii) si $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E$, alors $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (axiome d'homogénéité) ;
- iii) si $(x, y) \in E^2$, alors $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire).

De iii), on peut tirer :

$$\forall (x, y) \in E^2: \left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \&$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n: \|x_1 + x_2 + \dots + x_n\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| + \dots + \|x_n\|.$$

On déduit facilement des axiomes que l'implication de l'axiome de séparation est une équivalence. On peut aussi noter qu'il suffit de supposer qu'une norme est à valeurs réelles, les autres axiomes entraînant sa positivité.

Toute norme induit une distance sur E par $d(x, y) = \|x - y\|$. On vérifie immédiatement que d vérifie les axiomes d'une distance (rien d'autre n'est exigible concernant les distances) :

- i) $\forall (x, y) \in E^2$, $d(x, y) \geq 0$ et $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (axiome de séparation) ;
- ii) $\forall (x, y) \in E^2$: $d(x, y) = d(y, x)$ (axiome de symétrie) ;
- iii) $\forall (x, y, z) \in E^3$: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Exemples officiels

Sur $\mathbb{K}^n$, trois normes usuelles sont au programme. Pour $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on définit :

- $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$;
- $\|x\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$;
- $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$;
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

La norme notée $\|\cdot\|_2$ est, sur $\mathbb{R}^n$, la norme euclidienne classique ; c'est celle que l'on utilise en géométrie pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $n \in \{2, 3\}$. Elle dérive du produit scalaire euclidien. Si $n = 1$, les trois normes coïncident et définissent la valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et le module sur $\mathbb{C}$, considérés comme espaces vectoriels de dimension 1 sur eux-mêmes. Il est immédiat que, si N est une norme sur un e.v.n. E et si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors λN est encore une norme sur E (on a simplement modifié N d'un facteur d'échelle). À un tel facteur près, la valeur absolue (resp. le module) est l'unique norme sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{C}$ -e.v.).

Les normes précédentes s'étendent immédiatement à tout espace vectoriel E de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ en considérant, pour $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\|x\|_{\text{qq}} = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_{\text{qq}}$ soit, par exemple, $\|x_1 e_1 + \dots + x_n e_n\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Autrement dit, la norme du vecteur $x \in E$ est la norme dans $\mathbb{K}^n$ du vecteur de ses coordonnées dans $\mathcal{B}$. Bien sûr, les normes dépendent de la base choisie.

Il y a de nombreuses normes sur les espaces de matrices. En identifiant $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K}^{np}$ par isomorphisme, les trois normes précédentes s'appliquent. Plus généralement :

Proposition 1 (Transfert de norme par isomorphisme). . Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ un e.v.n., E un espace vectoriel et $\varphi: E \rightarrow F$ un isomorphisme. Alors, on définit une norme sur E par $\|x\|_E = \|\varphi(x)\|_F$.

Par ailleurs, on vérifie qu'en ce sens, $\|A\|_2 = \sqrt{\text{tr}(A^\top A)}$. Le produit scalaire correspondant est donné par $\langle A | B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$. C'est la structure euclidienne (et la structure d'e.v.n.) canonique sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons aussi

qu'une norme sur E induit trivialement par restriction une norme sur tout sous-espace vectoriel de E .

Toute structure préhilbertienne définit une norme : si $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est un espace préhilbertien, alors $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E . Toutes les normes ne sont pas préhilbertiennes. Par exemple, des trois normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$, seule la norme euclidienne est préhilbertienne (exercice).

Si I est un intervalle fermé borné et si $E = \mathcal{C}^0(I)$, les normes usuelles s'adaptent facilement :

- $\|f\|_2 = \left(\int_I f^2 \right)^{1/2}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\|f\|_2 = \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$;
- $\|f\|_1 = \int_I |f|$;
- $\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)|$.

Cela s'étend à des intervalles quelconques sous réserve de restreindre les espaces de fonctions afin de garantir l'intégrales ou de la borne supérieure considérées, mais **pas** aux espaces de fonctions continues par morceaux, l'axiome de séparation étant alors violé par les fonctions nulles sauf en un nombre fini (non nul) de points. Les normes usuelles s'adaptent aussi aux espaces de polynômes et aux espaces de suites. De manière générale, **on peut définir une norme infinie dès que les objets considérés (fonctions, suites...) sont bornés**.

Bien sûr, il y a quantité d'autres normes, que l'on peut rencontrer en exercice ou au détour d'un problème. La norme mesurant une distance, il peut être intéressant, selon ce que l'on veut contrôler, de fabriquer une norme (ou une famille de normes) *ad hoc* pour résoudre un problème donné. Par exemple, la norme infinie sur $\mathcal{C}^0([a, b])$ contrôle l'amplitude de f , et $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ contrôle à la fois l'amplitude de f et celle de sa dérivée. Dans un contexte mathématique plus élaboré, Cédric Villani raconte dans *Théorème vivant*, à propos du principal article lui ayant valu la médaille Fields, que l'un des points cruciaux de ce travail a été la conception d'une famille de normes.

Définition 2. Si $(E_i, \|\cdot\|_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une suite finie d'e.v.n., on munit $E = \prod_{i=1}^m E_i$ d'une structure d'e.v.n. en posant $N((x_1, x_2, \dots, x_m)) = \max_{1 \leq i \leq m} \|x_i\|_i$.

Autrement dit, $N(x) = \left\| (\|x_1\|_1, \|x_2\|_2, \dots, \|x_m\|_m) \right\|_\infty$, où la norme infinie est celle relative à la base canonique sur $\mathbb{R}^m$. Cela sera utile quand on évoquera la continuité des applications n -linéaires.

2. PARTIES D'UN E.V.N.

2.1. Boules. Les boules sont la généralisation à un e.v.n. des intervalles ouverts et fermés de $\mathbb{R}$.

Définition 3. Si $(a, \alpha) \in E \times \mathbb{R}_+^*$, on appelle boule ouverte de centre a et de rayon α l'ensemble

$$B(a, \alpha) = \{x \in E; \|x - a\| < \alpha\} = \{a + \alpha u; \|u\| < 1\} = a + \alpha B(0, 1).$$

On appelle boule fermée de centre a et de rayon α l'ensemble

$$\overline{B}(a, \alpha) = \{x \in E; \|x - a\| \leq \alpha\} = \{a + \alpha u; \|u\| \leq 1\} = a + \alpha \overline{B}(0, 1).$$

On appelle sphère de centre a et de rayon α l'ensemble

$$S(a, \alpha) = \{x \in E; \|x - a\| = \alpha\} = \{a + \alpha u; \|u\| = 1\} = a + \alpha S(0, 1).$$

Exemples.

- Dans $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue, $B(a, \alpha) =]a - \alpha, a + \alpha[$, $\overline{B}(a, \alpha) = [a - \alpha, a + \alpha]$ et $S(a, \alpha) = \{a - \alpha, a + \alpha\}$.
- Dans $\mathbb{R}^2$ muni de $\|\cdot\|_2$, $S(a, \alpha)$ est le cercle de centre a et de rayon α . $B(a, \alpha)$ est le disque ouvert de centre a et de rayon α (i.e. sans le cercle) et $\overline{B}(a, \alpha)$ est le disque fermé de centre a et de rayon α (i.e. cercle compris).
- Dans $\mathbb{R}^3$ muni de $\|\cdot\|_2$, $S(a, \alpha)$ est la sphère de centre a et de rayon α (au sens usuel) et les boules sont des sphères pleines.
- Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), les boules relatives à $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont carrées (resp. cubiques).

2.2. Parties convexes. Si $(x, y) \in E^2$, la droite affine (xy) est l'ensemble des vecteurs $x + t(y - x)$, $t \in \mathbb{R}$; la demi-droite $[xy)$ correspond aux t positifs. Le segment $[x, y]$ est décrit par $\{(1 - t)x + ty; t \in [0, 1]\}$.

Définition 4. Une partie A d'un e.v.n. E est convexe si, pour tout couple (x, y) de vecteurs de A , le segment $[x, y]$ est contenu dans A .

Propriétés et exemples.

- Le caractère convexe est indépendant de la norme;
- tout sous-espace vectoriel de E est convexe;
- tout demi-espace de E est convexe. Cela généralise les demi-plans de $\mathbb{R}^2$ définis par l'ensemble des points situés « d'un côté » d'une droite donnée;
- les boules, ouvertes comme fermées, sont convexes;
- les sphères ne sont jamais convexes;
- la convexité est stable par intersection, mais pas par réunion;
- les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles;
- une fonction $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, et seulement si, son épigraphe $\{(x, y) \in I \times \mathbb{R}; y \geq f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.
- La convexité est stable par passage à l'adhérence et à l'intérieur (exercice).

2.3. Parties bornées.

Théorème et définition 1. Une partie $A \subset E$ est bornée si elle vérifie les propositions équivalentes suivantes (on peut aussi utiliser des boules fermées) :

- i) $\exists M, \forall x \in A: \|x\| \leq M$ (i.e. $\{\|x\|; x \in A\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$);
- ii) $\exists(a, \alpha) \in E \times \mathbb{R}_+^*: A \subset B(a, \alpha)$;
- iii) $\forall a \in E, \exists \alpha > 0: A \subset B(a, \alpha)$.

Propriétés et exemples.

- Les parties finies, les boules et les sphères sont bornées;
- le caractère borné est préservé par réunion finie;
- si A est bornée et si $B \subset A$, alors B est bornée;
- toute suite convergente est bornée.

3. NORMES ET SUITES

3.1. Convergence des suites, suites extraites.

Définition 5. Soit $(u_n)_n$ une suite d'éléments de $(E, \|\cdot\|)$. On dit que $(u_n)_n$ converge vers $\ell \in E$ si la suite réelle positive $(\|u_n - \ell\|)_n$ tend vers 0. Cela se reformule avec des quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}: n \geq n_0 \implies u_n \in \overline{B}(\ell, \varepsilon).$$

On peut noter $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} \ell$, ou $\lim u_n = \ell$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme utilisée ou si la limite n'en dépend pas (c'est le cas en dimension finie comme on le verra plus loin). Comme dans le cas réel, la limite est linéaire : si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites convergentes de $(E, \|\cdot\|)$, où E est un $\mathbb{K}$ -e.v. et si $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et $w_n = \alpha u_n + \beta v_n$, alors $(w_n)_n$ est convergente, de limite $\alpha \lim u_n + \beta \lim v_n$.

Définition 6. Une suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_n$ est une suite de la forme $(u_{\sigma(n)})_n$, où $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

— En particulier, toute application $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante est de limite infinie. Il s'ensuit que si $(u_n)_n$ converge vers ℓ , alors, toute suite $(u_{\sigma(n)})_n$ extraite de $(u_n)_n$ converge également vers ℓ .

— La réciproque est évidemment fausse — prendre $u_n = (-1)^n$ —, mais des formes partielles sont exactes :

- Par exemple, on a équivalence entre les deux propositions suivantes :
 - i) $(u_n)_n$ converge vers ℓ ;
 - ii) $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers ℓ .
- Cas particulier important : si $(u_n)_n$ est réelle monotone, elle converge si, et seulement s'il existe une suite extraite de $(u_n)_n$ qui converge. Voir la section 7 pour une discussion à ce sujet.

3.2. Comparaison des normes. Sur $\mathbb{K}^p$, si $u_n = (u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, \dots, u_p^{(n)})$ et $\ell = (\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p)$, alors

$$u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_1} \ell \iff u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_2} \ell \iff u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_\infty} \ell \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket : \lim_{n \rightarrow \infty} u_k^{(n)} = \ell_k.$$

Cela n'est pas aussi simple en général et la convergence peut dépendre de la norme.

Exemple 1. En dimension infinie, la même suite peut converger relativement à une norme, mais pas par rapport à une autre. Ainsi, dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$, si $f_n(x) = nx \mathbb{1}_{[0, 1/n]}(x) + \mathbb{1}_{[1/n, 1]}(x)$, alors on vérifie facilement que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - \mathbb{1}_{[0, 1]}\|_1 = 0$ mais que $\neg \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - \mathbb{1}_{[0, 1]}\|_\infty = 0 \right)$, ce qui montre que $(f_n)_n$ converge vers la fonction constante égale à 1 relativement à la norme 1, mais pas relativement à la norme infinie. En fait, cette suite diverge relativement à la norme infinie car la limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue (cf. chapitre sur les suites et séries de fonctions).

Proposition 2. Soit E un $\mathbb{K}$ -e.v. Soient N_1 et N_2 deux normes sur E . Alors,

$$\left[\exists \alpha > 0, \forall x \in E : N_1(x) \leq \alpha N_2(x) \right] \iff \left[\forall (u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}, \forall \ell \in E : u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{N_2} \ell \implies u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{N_1} \ell \right].$$

Cela conduit naturellement à la définition suivante, qui introduit une relation d'équivalence.

Définition 7. Soient N_1 et N_2 , deux normes sur un $\mathbb{K}$ -e.v. E . On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes si

$$\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}, \forall x \in E : \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

Corollaire 1. Deux normes sont équivalentes si, et seulement si, elles définissent la même notion de limite (i.e. une suite convergente pour l'une l'est nécessairement pour l'autre et les limites sont les mêmes).

Exemple 2. On rappelle que l'on définit les trois normes usuelles sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ de la façon suivante :

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_2 = \left(\int_a^b f(x)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$. Alors,

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b \|f\|_\infty dx = (b-a) \|f\|_\infty ; \\ \|f\|_2 &= \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \|f\|_\infty^2 dx \right)^{1/2} = \sqrt{b-a} \|f\|_\infty ; \\ \|f\|_1 &= \int_a^b 1 \times |f(x)| dx \leq \sqrt{b-a} \|f\|_2 \quad (\text{Cauchy-Schwarz}). \end{aligned}$$

Ces trois majorations sont optimales car il y a égalité pour les fonctions constantes. En revanche, pour la fonction affine par morceaux $f_n(x) = n^2 \left(x - b + \frac{1}{n} \right) \mathbb{1}_{[b-1/n, b]}(x)$, nulle sur $[a, b-1/n]$ et telle que $f_n(b) = n$, on calcule

$\|f_n\|_\infty = n$, $\|f_n\|_1 = 1/2$ et (par le changement de variable $u = x - b + 1/n$) $\|f_n\|_2 = \frac{\sqrt{3n}}{3}$, ce qui montre que les trois normes sont deux à deux non équivalentes.

Exemple 3. Voici un exemple étonnant qui montre qu'en dimension infinie, une suite peut avoir des limites différentes selon la norme choisie. Soient $E = \mathbb{R}[X]$. Soient $(P_k)_{k \geq 0}$ une suite de polynômes avec $\deg(P_k) = k$, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $n = \deg(Q)$. Posons $R_i = P_i$ si $0 \leq i \leq n$ et $R_i = P_i - Q$ si $i > n$. Alors, $(R_i)_{i \geq 0}$ est une famille échelonnée en degré et $\deg(R_i) = i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, donc $(R_i)_{i \geq 0}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Tout polynôme $P \in E$ s'écrit donc de manière unique $P = \sum_{i \geq 0} a_i R_i$ et l'on

vérifie facilement par ailleurs que $\|P\| = \sum_{i \geq 0} \frac{|a_i|}{i+1}$ définit une norme sur E .

Alors, pour tout $i > n$, on a $\|R_i\| = \|P_i - Q\| = \frac{1}{i+1} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$, donc $(P_i)_i$ tend vers Q . Autrement dit, on peut construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que la même suite $(P_i)_i$ converge vers n'importe quel polynôme déterminé à l'avance !

4. TOPOLOGIE

4.1. De quoi s'agit-il ? Le mot *topologie* vient du grec τόπος, qui signifie *lieu*. C'est une branche des mathématiques qui s'intéresse plus particulièrement aux propriétés des formes préservées par déformations continues. Dans l'acception qui nous occupe, il s'agit de la *topologie générale*, qui s'est principalement développée entre la fin du XIX^{ème} siècle et 1950 pour donner des bases générales, abstraites et sûres à l'analyse.

L'origine en remonte à Cantor, qui s'est posé la question de savoir quelles étaient les parties A de $\mathbb{R}$ telles que, si $\sum_{n \geq 0} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$ est la fonction nulle pour tout $t \notin A$, alors $a_n = b_n = 0$ pour tout n (unicité de la représentation sous la forme d'une série trigonométrique).

Dans le cadre du programme, il s'agit plus modestement de comprendre les définitions d'ouvert et de fermé, d'adhérence et d'intérieur, d'en acquérir une compréhension intuitive dans les cas simples et de savoir utiliser les théorèmes sur les images directes et réciproques.

4.2. La topologie à bac + n, $n \in \mathbb{Z}$, $n \leq 1$. Les termes d'*ouvert* et de *fermé* sont connus pour les intervalles.

Intervalles ouverts : ce sont ceux de la forme $]a, b[$ avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, en particulier $\emptyset$ (pour $a = b$) et $\mathbb{R}$ (pour $(a, b) = (-\infty, +\infty)$).

Intervalles fermés : ce sont ceux de la forme $[a, b]$, $[a, +\infty[$ ou $]-\infty, b]$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (ce qui donne $\emptyset$ si $b < a$), ainsi que $\mathbb{R}$.

Deux théorèmes fondamentaux d'analyse réelle utilisent de manière cruciale la topologie des intervalles :

Théorème 1. 1) *L'image continue d'un segment (i.e. un intervalle fermé-borné) est un segment. En particulier, une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.*

2) *Si I est un intervalle ouvert, si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors f' s'annule en tout point de I où f admet un extremum local.*

— La fonction $x \mapsto x^{-1}$ sur $]0, 1]$ montre que l'hypothèse *fermé* est nécessaire dans 1).

— La fonction $x \mapsto x^2$ sur $]0, 1]$ montre que l'hypothèse *ouvert* est nécessaire dans 2).

4.3. Les notions fondamentales.

Définition 8. Soit $A \subset E$.

1) On dit que a est un point intérieur à A s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset A$. L'ensemble des points intérieurs à A est appelé intérieur de A et est noté $\overset{\circ}{A}$.

2) On dit que a est un point adhérent à A si, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. L'ensemble des points adhérents à A est appelé l'adhérence de A et est noté $\overline{A}$.

Il est clair que $\overset{\circ}{A} \subset A \subset \overline{A}$.

Définition 9. Soit $A \subset E$.

1) A est dite ouverte si $\overset{\circ}{A} = A$, i.e. si tout point de A lui est intérieur.

2) A est dite fermée si $\overline{A} = A$, i.e. si les seuls points adhérents à A sont les points de A elle-même.

Proposition 3 (Caractérisation séquentielle). Soit $A \subset E$.

1) Un point est adhérent à A si, et seulement si, il est limite d'une suite (convergente) d'éléments de A .

2) A est fermée si, et seulement si, toute suite d'éléments de A convergent dans E admet pour limite un élément de A .

La deuxième propriété indique qu'une partie est fermée si elle est stable par passage à la limite. Dans le cas des intervalles de $\mathbb{R}$, on retrouve que, sous réserve d'existence, l'on peut passer à la limite dans une inégalité large.

Remarque 1. Soient E un espace vectoriel et $A \subset E$. La clôture de A vis-à-vis des combinaisons linéaires est $\text{Vect}(A)$: on note que $A \subset \text{Vect}(A) = \text{Vect}(\text{Vect}(A))$. La clôture est croissante, en ce sens que $A \subset B$ entraîne $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$. Les parties A de E telles que $A = \text{Vect}(A)$ sont les s.e.v. de E .

De manière analogue, si E est muni de plus d'une norme, $\overline{A}$ est la clôture de A relativement à la notion de limite : on a $A \subset \overline{A} = \overline{\overline{A}}$. L'opération d'adhérence est croissante, $A \subset B$ entraînant $\overline{A} \subset \overline{B}$. Les parties de A égales à leur adhérence sont les parties fermées de A .

Exemples et propriétés

- Si $A \subset B \subset E$, alors $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
- On note $A^c = E \setminus A$ le complémentaire de $A \subset E$. Alors $\overline{A^c} = (\overset{\circ}{A})^c$ et $\widehat{A^c} = (\overline{A})^c$.
- A est ouverte $\iff A^c$ est fermée et A est fermée $\iff A^c$ est ouverte.
- Le caractère ouvert est préservé par réunion quelconque et par intersection finie. Il ne l'est pas par intersection quelconque comme le montre le contreexemple $\bigcap_{n \geq 2} \left] -\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n} \right[= [0, 1]$.
- Le caractère fermé est préservé par intersection quelconque et par réunion finie. Il ne l'est pas par réunion quelconque comme le montre le contreexemple $\bigcup_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n} \right] =]0, 1[$.
- $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon(a))$ est un ouvert et $\overline{A}$ est un fermé.
- Plus précisément, $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A et $\overline{A}$ le plus petit fermé contenant A .
- Les parties finies de E sont fermées.
- Les boules ouvertes sont ouvertes et les boules fermées sont fermées.
- $\widehat{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$, $\widehat{A \cup B} \supset \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (exercice).
- Les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et E (résultat à retenir, preuve en exercice).
- $\widehat{B(a, \alpha)} = B(a, \alpha)$ et $\overline{B(a, \alpha)} = \overline{B}(a, \alpha)$ (exercice).

Définition 10 (H.P.). Soit $A \subset E$. On appelle frontière de A et on note ∂A l'ensemble fermé $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$.

Dans les cas simples, le mot traduit bien ce que le sens commun entend par « frontière ». Ainsi, si $a \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\partial B(a, \alpha) = \partial \overline{B}(a, \alpha) = S(a, \alpha)$. Dans des exemples plus compliqués, la notion perd ce caractère intuitif. Ainsi, si $\mathbb{D}$ est l'ensemble des réels décimaux, alors $\partial \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$!

Les ensembles dont l'adhérence est pleine jouent un rôle important en analyse et en algèbre matricielle, ce qui justifie la définition suivante :

Définition 11. On dit qu'une partie A de E est dense dans E si $\overline{A} = E$. Plus généralement, on dit que A est dense dans $B \subset E$ si $A \subset B \subset \overline{A}$.

Exemples. — $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}^c$, comme $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^c$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

- Les polynômes à coefficients décimaux sont denses dans $\mathbb{R}[X]$.
- $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

5. LIMITES ET CONTINUITÉ

5.1. Limite en un point adhérent.

Définition 12. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux e.v.n., $A \subset E$, $a \in \overline{A}$ et $f: A \rightarrow F$. On dit que « $f(x)$ admet pour limite $\ell \in F$ quand x tend vers a , x appartenant à A » et l'on note $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \ell$ si (les deux formulations ci-dessous sont synonymes) :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in A: \|x - a\|_E \leq \alpha \implies \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0: f(\overline{B}_E(a, \alpha) \cap A) \subset \overline{B}_F(\ell, \varepsilon).$$

Exemples classiques.

- On fait la différence entre $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$ (limite selon $A = \mathbb{R}^*$, qui vaut 1) et $\lim_{x \rightarrow 0} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^*}(x)$ (limite selon $A = \mathbb{R}$, qui n'existe pas).
- Les limites à gauche (resp. à droite) en un réel a s'obtiennent en prenant $A =] - \infty, a[$ (resp. $A =]a, +\infty[$). On peut aussi fermer les intervalles. Cela donne, à gauche, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \leq a}} f(x)$.

- On peut voir les limites en l'infini comme des limites en un point adhérent en prenant $E = \overline{\mathbb{R}}$ (qui n'est pas un e.v.n., mais sur lequel on peut définir une distance par $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$) et $A = \mathbb{R}$.
- Les propriétés habituelles de la limite (linéarité, produit, quotient s'ils sont définis) s'étendent à la limite en un point adhérent. La conservation des inégalités larges se généralise : si $f: A \rightarrow F$ avec $f(A) \subset B$, alors, sous réserve d'existence, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) \in \overline{B}$.
- Le cas de la composition est un peu plus subtil à énoncer :

Proposition 4. Soient E, F et G , trois e.v.n., $A \subset E$, $B \subset F$. Soient $a \in \overline{A}$, $b \in F$ et $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} G$. Supposons que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = b$. Alors, $b \in \overline{B}$ et si, de plus, $\lim_{\substack{y \rightarrow b \\ y \in B}} g(y) = \ell$, alors $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} g \circ f(x) = \ell$.

5.2. Caractérisation séquentielle de la limite.

Proposition 5. Soient E et F des e.v.n., $A \subset E$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Les deux propositions suivantes sont alors équivalentes :

- i) $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \ell$.
 - ii) $\forall (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}} : \lim u_n = a \implies \lim f(u_n) = \ell$.
- Si $E = \mathbb{R}$, on peut ajouter une variante de ii) :
- iii) $\forall (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ strictement monotone : $\lim u_n = a \implies \lim f(u_n) = \ell$.

Plus important, si $E = F = \mathbb{R}$ et si f est monotone, on a une équivalence supplémentaire :

- iv) $\exists (u_n)_n \in A^{\mathbb{N}}$ non constante : $\lim u_n = a$ et $\lim f(u_n) = \ell$.

5.3. Continuité en un point. La continuité semble a priori être une notion intrinsèquement locale.

Définition 13. Si $A \subset E$, une fonction $f: A \rightarrow F$ est continue en $a \in A$ si $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$. Si $a \in \overline{A} \setminus A$ et si $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$ existe dans E , on peut prolonger par continuité la fonction f en a par la valeur ℓ .

Remarques, propriétés

- Cela n'a aucun sens de prolonger par continuité en un point une fonction qui y est déjà définie, qu'elle y soit continue ou pas.
- Toute combinaison linéaire de fonctions continues en a est continue en a . La stabilité s'étend aux différents types de produits, au quotient et à la composée, pourvu que la structure permette de les définir ($F = \mathbb{R}$ ou $F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour le produit, $F = \mathbb{R}$ et la fonction au dénominateur ne s'annule pas pour le quotient, $F = \mathbb{R}^3$ pour le produit vectoriel, F préhilbertien pour le produit scalaire). Il s'agit d'une application immédiate des résultats correspondants sur les limites.
- Si $f: E \rightarrow F$ et si f est continue en tout point de $A \subset E$, alors $f|_A$ est continue, mais la réciproque est fautive (considérer $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ et $A = [0, 1[$; $f|_A$ est continue, en particulier en 0, alors que f n'est pas continue en 0).

5.4. Continuité globale. On peut considérer la continuité comme une notion globale. La définition peut paraître à cet égard un peu artificielle, mais les caractérisations et conditions suffisantes, elles, sont bien globales.

Définition 14. Si $A \subset E$, une fonction $f: A \rightarrow F$ est continue si elle est continue en tout point de A .

Théorème 2. Soit $f: E \rightarrow F$. Alors, L.P.S.S.E. :

- i) f est continue ;
- ii) Si $\mathfrak{D}$ est un ouvert de F , alors $f^{-1}(\mathfrak{D})$ est un ouvert de E ;
- iii) Si $\mathfrak{F}$ est un fermé de F , alors $f^{-1}(\mathfrak{F})$ est un fermé de E .

- En pratique, ce théorème est utilisé pour montrer que certains ensembles sont fermés (ou ouverts).
- Cas particulier courant : si $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, l'image réciproque d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est ouverte et l'image réciproque d'un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ est fermée.
- Par exemple, $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est l'image réciproque de l'ouvert $\mathbb{R}^*$ par le déterminant.

5.5. Fonctions lipschitziennes.

Définition 15. Pour $k \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $f: A \rightarrow F$ est dite k -lipschitzienne si

$$\forall (x, y) \in A^2: \|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

Elle est lipschitzienne si elle est k -lipschitzienne pour un certain k .

Proposition 6. 1. L'ensemble des fonctions lipschitziennes de E dans F est un espace vectoriel. Celui des fonctions lipschitziennes de E dans E est stable par composition.

2. Toute application lipschitzienne est continue. En particulier, l'application $x \mapsto \|x\|$ est 1-lipschitzienne, donc continue.

Proposition 7. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire. L.P.S.S.E. :

- i) f est continue en 0_E ;
- ii) f est continue ;
- iii) f est lipschitzienne ;
- iv) $\exists M, \forall x \in E: \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E$.

On a un résultat similaire à la proposition 7 sur les normes, qui étend la proposition 6 et permet d'en caractériser l'équivalence (exercice) :

Proposition 8. Soit E un espace vectoriel, N_0 et N_1 deux normes sur E . L.P.S.S.E. :

- i) les normes N_0 et N_1 sont équivalentes ;
- ii) pour $i \in \{0, 1\}$, l'application $x \mapsto N_i(x)$ est continue comme application de (E, N_{1-i}) dans $\mathbb{R}$;
- iii) les applications ci-dessus sont continues en 0_E .

Proposition 9 (Propriété d'espace vectoriel topologique). Les applications suivantes sont continues.

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{array}$$

sont continues.

6. ESPACES VECTORIELS NORMÉS DE DIMENSION FINIE

Le cas de la dimension finie est très particulier et très important. Son principal résultat est le suivant.

6.1. Équivalence des normes.

Théorème 3 (admis). Si E est de dimension finie, alors toutes les normes sont équivalentes.

Il est facile de le montrer pour les trois normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$, normes qui, moyennant le choix d'une base, peuvent se définir sur n'importe quel e.v. de dimension finie.

Exemple 4. Les trois normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes. Plus précisément, pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2 \leq n \|x\|_\infty$$

et toutes les constantes sont optimales. Ce n'est plus le cas dans les espaces de dimension infinie.

Ainsi, en dimension finie, toute norme est équivalente à une norme facile à manipuler explicitement et qui s'exprime en fonction des coordonnées des vecteurs dans une base donnée. Changer de base modifie la norme, mais on obtient bien sûr une norme équivalente à la première. Ainsi, tous les calculs de convergence de suite, de limites de fonctions, de continuité, se ramènent à des propriétés en dimension 1, coordonnée par coordonnée.

Plus précisément, la convergence des suites se réduit à une convergence coordonnée par coordonnée, cela étant indépendant de la base dans laquelle on se place : si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E , et si $(x_n)_n$ est une suite dont l'expression dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par $x_n = \sum_{k=1}^n \lambda_{k,n} e_k$, alors, pour $\ell = \sum_{k=1}^n \ell_k e_k$, on a

$$\lim x_n = \ell \iff \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket: \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{k,n} = \ell_k.$$

On peut en déduire que tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un e.v.n E est un fermé de E .

De même, si F est de dimension finie de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_m)$, toute fonction $f: A \rightarrow F$ s'écrit $f = \sum_{i=1}^m f_i e_i$, où $f_i: A \rightarrow \mathbb{K}$. Pour $a \in \overline{A}$, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$ existe si, et seulement si, $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_i(x)$ existe pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ et l'on a

$$\left[\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket: \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_i(x) = \ell_i \right] \iff \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \sum_{i=1}^m \ell_i e_i.$$

6.2. Le théorème des bornes. On a aussi le théorème suivant, derrière lequel se cache la notion hors programme de compacité, et qui généralise à la dimension finie ce que l'on sait dans le cas des fonctions réelles de la variable réelle.

Théorème 4 (théorème des bornes atteintes, admis). *Soit $f: E \supset A \rightarrow F$ avec $(E, \|\cdot\|_E)$ de dimension finie et $(F, \|\cdot\|_F)$. Si A est fermée-bornée, alors $f(A)$ est fermée-bornée. En particulier, si $F = \mathbb{R}$, $f|_A$ admet un minimum et un maximum.*

6.3. Classes d'applications continues. Des classes entières d'applications sont automatiquement continues.

Proposition 10. *Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, et si E est de dimension finie, alors f est continue. Plus généralement, toute application n -linéaire définie sur un produit d'espaces de dimension finie est continue.*

Exemples — Le déterminant, vu comme une application définie sur E^n , où $E = \mathbb{K}^n$, définit une application continue. Il en va de même de l'application $A \mapsto \det(A)$ définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

— Les applications $M \mapsto AM$, $M \mapsto MA$ (linéaires) et $(A, B) \mapsto AB$ (bilinéaire), définies sur des espaces matriciels appropriés, sont continues. Leurs versions fonctionnelles $g \mapsto f \circ g$, $g \mapsto g \circ f$ et $(f, g) \mapsto f \circ g$ sont également continues... en dimension finie.

— Pour $(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$, l'application définie sur $\mathbb{K}^p$ par $(x_1, x_2, \dots, x_p) \mapsto x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}$ est dite *monomiale*. Une application *polynomiale* (ici, à p variables) est une combinaison linéaire d'applications monomiales. Les applications polynomiales sont continues. Le déterminant, vu comme une application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ identifié à $\mathbb{K}^{n^2}$ est un exemple d'application polynomiale, dont on retrouve ainsi la continuité.

6.4. Bilan : qu'est-ce qui change (ou pas) avec la norme ? La convexité est une notion purement géométrique : une partie d'un $\mathbb{K}$ -e.v. E est convexe ou ne l'est pas. Cela n'a rien à voir avec les normes susceptibles de munir E d'une structure topologique.

Les notions topologiques sont stables par changement de norme *équivalente*. Elles ne le sont pas par changement de norme *non équivalentes*. Ainsi de l'adhérence et de l'intérieur, du caractère ouvert ou fermé, du caractère borné. Ainsi de la nature des suites et de leur limite, de la limite des fonctions en un point, et de leur continuité, en un point comme globalement, et du caractère lipschitzien.

En particulier, en dimension finie, toutes les normes étant équivalentes, toutes les notions ci-dessus sont intrinsèques (indépendantes de la norme). De plus, limites et continuité sont équivalentes aux limites et continuité prises coordonnée par coordonnée. En dimension finie, on peut librement choisir une norme bien adaptée aux calculs que l'on veut faire, ou au résultat que l'on veut démontrer. En particulier, sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on privilégie le plus souvent les normes sous-multiplicatives, c'est-à-dire vérifiant l'inégalité $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Le rapport de Lipschitz n'est pas conservé par changement de norme, même de norme équivalente.

7. COMPLÉMENT 1. APPLICATION DE LA CARACTÉRISATION SÉQUENTIELLE À LA NATURE DES SÉRIES ET DES INTÉGRALES

Les résultats de cette section ne sont pas à apprendre, mais à comprendre, pour pouvoir, le cas échéant, s'en servir à l'écrit ou à l'oral.

7.1. Application à la convergence des intégrales.

Proposition 11. 1) Soit $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction c.p.m. Les deux propositions suivantes sont alors équivalentes :

- i) $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.
 - ii) Pour toute suite croissante divergente $(u_n)_n$ avec $u_0 \geq a$, la série $\sum \int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t) dt$ converge.
- 2) Si, de plus, f est une fonction réelle de signe constant au voisinage de $+\infty$, on a une troisième équivalence :
- iii) Il existe une suite croissante divergente $(u_n)_n$ telle que la série $\sum \int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t) dt$ converge.

Démonstration. La relation de Chasles donne $\sum_{k=0}^{N-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f(t) dt = \int_{u_0}^{u_N} f(t) dt$. Les équivalences sont alors la traduction de la définition de la convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ et de la proposition 5. $\square$

Dans la proposition 11, il est naturel de considérer des suites croissantes, mais ce n'est pas nécessaire et l'on peut supprimer cette condition. Si les conditions sont vérifiées, on a de plus l'égalité numérique $\int_{u_0}^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t) dt$ par passage à la limite.

Si la fonction f n'est pas de signe constant, la caractérisation iii) peut être en défaut comme le montre le contreexemple $f(t) = \cos t$ et $u_n = n\pi$: l'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos t dt$ diverge bien que $\int_0^{n\pi} \cos t dt = 0$ pour tout n . On dispose alors d'une condition suffisante plus compliquée :

Proposition 12. Soient $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction c.p.m. et $(u_n)_n$ une suite strictement croissante divergente avec $u_0 \geq a$. Si les deux conditions ci-dessous sont vérifiées, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge.

- i) la série $\sum \int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t) dt$ converge ;
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{u_n}^{u_{n+1}} |f(t)| dt = 0$.

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Alors, il existe un unique entier n tel que $u_n \leq y < u_{n+1}$ et l'on écrit

$$\int_{u_0}^y f(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} f(t) dt + \int_{u_n}^y f(t) dt \quad \& \quad \left| \int_{u_n}^y f(t) dt \right| \leq \int_{u_n}^y |f(t)| dt \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} |f(t)| dt.$$

Les hypothèses permettent de conclure à la convergence de l'intégrale et à l'égalité $\int_{u_0}^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{u_n}^{u_{n+1}} f(t) dt$. Noter que l'hypothèse ii) est en particulier vérifiée si $(u_{n+1} - u_n)_n$ est bornée et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. $\square$

Exemple 5. Déterminer la nature de l'intégrale $I_\beta = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^\beta \cos^2 x}$ pour $\beta > 0$. On note que, si $0 < \beta \leq 1$, la divergence de I_β est assurée par la minoration

$$\frac{1}{1 + x^\beta \cos^2 x} \geq \frac{1}{1 + x^\beta} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^\beta}.$$

On suppose désormais $\beta > 1$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit $I_{k,\beta}$ par

$$J((k+1)^\beta \pi^\beta) \leq I_{k,\beta} = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + x^\beta \cos^2 x} \leq J((k\pi)^\beta) \quad \text{où} \quad J(c) = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + c \cos^2 x}$$

Calculons $J(c)$ pour $c > 0$.

$$J(c) = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{dx}{1 + c \cos^2 x} \stackrel{(t=x-k\pi)}{=} \int_0^\pi \frac{dt}{1 + c \cos^2 t} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + c \cos^2 t} \quad \text{car} \\ \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + c \cos^2 t} \stackrel{(u=\pi-t)}{=} \int_{\pi/2}^\pi \frac{du}{1 + c \cos^2 u}.$$

Le changement de variable $t = \arctan u$ donne $dt = \frac{du}{1+u^2}$ et $\cos^2 t = \frac{1}{1+\tan^2 t} = \frac{1}{1+u^2}$, d'où

$$\begin{aligned} J(c) &= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+c \cos^2 t} = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+\frac{c}{1+u^2}} \times \frac{2 du}{1+u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{2 du}{1+c+u^2} = \\ &= \left[\frac{2}{\sqrt{1+c}} \arctan \left(\frac{u}{\sqrt{1+c}} \right) \right]_0^{u \rightarrow +\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{1+c}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $I_{k,\beta} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{\sqrt{1+(k\pi)^\beta}} \sim \frac{\pi^{1-\beta/2}}{k^{\beta/2}}$ et la série $\sum I_{k,\beta}$ converge si, et seulement si, $\beta > 2$. En vertu de la proposition 11 - iii), l'intégrale I_β converge si, et seulement si, $\beta > 2$.

7.2. Application à la convergence des séries. En matière de séries, il ne s'agit plus de caractérisation séquentielle, puisqu'il n'est question que de suites, mais de suites extraites et l'on parle de *sommation par paquets*. De manière analogue aux propositions sur les intégrales :

Proposition 13. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle ou complexe. On note $S_n = u_{n_0} + u_{n_0+1} + \dots + u_n$ sa somme partielle générique. Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- i) la série $\sum u_n$ converge ;
- ii) Toute suite extraite $(S_{N_n})_n$ de $(S_n)_n$ converge.

Si, de plus, $(u_n)_n$ est réelle de signe constant, on a une troisième équivalence :

- iii) il existe une suite extraite $(S_{N_n})_n$ de $(S_n)_n$ convergente.

Si $(N_n)_n \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ est strictement croissante, une condition suffisante de convergence de la série réelle ou complexe $\sum u_n$ est :

$$iv) \text{ la suite } (S_{N_n})_n \text{ converge et } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=N_n+1}^{N_{n+1}} |u_k| = 0.$$

Exemple 6. Montrons que $\frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ converge. Pour $p \in \mathbb{N}$, $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = p \iff n \in \llbracket p^2, (p+1)^2 - 1 \rrbracket$ et l'on a donc

$$\sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} = (-1)^p \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{n}.$$

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto 1/t$ étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut appliquer la comparaison série-intégrale, qui donne

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} &\leq \frac{1}{n} \leq \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} \quad \therefore \quad \int_{p^2}^{(p+1)^2} \frac{dt}{t} \leq \sum_{n=p^2}^{p^2-1} \frac{1}{n} \leq \int_{p^2-1}^{(p+1)^2-1} \frac{dt}{t}; \\ 2 \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) &= \int_{p^2}^{(p+1)^2} \frac{dt}{t} \leq \int_{p^2-1}^{(p+1)^2-1} \frac{dt}{t} \leq \int_{p^2-1}^{(p+1)^2} \frac{dt}{t} = \int_{p^2-1}^{p^2} \frac{dt}{t} + \int_{p^2}^{(p+1)^2} \frac{dt}{t} = 2 \ln \left(1 + \frac{1}{p} \right) + \mathcal{O} \left(\frac{1}{p^2} \right) \\ \therefore \quad \sum_{n=p^2}^{p^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} &= (-1)^p \sum_{n=p^2}^{p^2-1} \frac{1}{n} = \frac{(-1)^p}{p} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{p^2} \right). \end{aligned}$$

On a donc convergence de la série $\sum_p \sum_{n=p^2}^{p^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ par le critère spécial des séries alternées et la comparaison

avec la série de Riemann d'exposant 2 et $\lim_{p \rightarrow \infty} \sum_{n=p^2}^{p^2-1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n} = 0$, d'où la convergence de $\frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ par la proposition 13 - iv).

8. COMPLÉMENT 2. CONTINUITÉ DES APPLICATIONS n -LINÉAIRES

On peut établir le résultat suivant, hors programme (sauf cas du déterminant), qui généralise la proposition 7.

Proposition 14. Soient, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ des e.v.n. $(E_i, \|\cdot\|_{E_i})$, un autre e.v.n. $(G, \|\cdot\|_G)$ et $\varphi: \prod_{i=1}^n E_i \rightarrow G$ une application n -linéaire. On note $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

1. L.P.S.S.E. :

- i) φ est continue ;
- ii) φ est continue en $0_E = (0_{E_1}, 0_{E_2}, \dots, 0_{E_n})$;
- iii) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E: \|\varphi(x)\|_G \leq M \prod_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i}$.

2. Si les E_i sont tous de dimension finie, φ est continue.

Démonstration. 1. L'implication $i) \Rightarrow ii)$ est triviale.

$ii) \Rightarrow iii)$: rappelons que, selon la définition 2, $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_E = \max_{1 \leq i \leq n} (\|x_i\|_{E_i})$. La démonstration est similaire au cas linéaire. En prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition de la limite, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|x\|_E \leq \alpha$ entraîne $\|f(x)\|_G \leq 1$. Alors, par n -linéarité, si $x_i \neq 0_{E_i}$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\varphi(x) = \frac{\|x_1\|_{E_1} \times \|x_2\|_{E_2} \times \cdots \times \|x_n\|_{E_n}}{\alpha^n} \varphi\left(\frac{\alpha x_1}{\|x_1\|_{E_1}}, \frac{\alpha x_2}{\|x_2\|_{E_2}}, \dots, \frac{\alpha x_n}{\|x_n\|_{E_n}}\right) \quad \therefore \quad \|\varphi(x)\|_G \leq \frac{1}{\alpha^n} \prod_{i=1}^n \|x_i\|_{E_i},$$

la majoration étant par ailleurs triviale s'il existe $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $x_i = 0_{E_i}$.

$iii) \Rightarrow i)$: En utilisant la n -linéarité de φ , il vient à $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ fixé,

$$\begin{aligned} \Delta &= \varphi(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{X \subsetneq \llbracket 1, n \rrbracket} \varphi[\mathbb{1}_X(1)x_1 + (1 - \mathbb{1}_X(1))h_1, \mathbb{1}_X(2)x_2 + (1 - \mathbb{1}_X(2))h_2, \dots, \mathbb{1}_X(n)x_n + (1 - \mathbb{1}_X(n))h_n]. \end{aligned}$$

Écrite avec les fonctions indicatrice, la quantité $\mathbb{1}_X(i)x_i + (1 - \mathbb{1}_X(i))h_i$ vaut x_i si $i \in X$ et h_i sinon.

On somme sur les $2^n - 1$ parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ distinctes de $\llbracket 1, n \rrbracket$ car le terme correspondant à $X = \llbracket 1, n \rrbracket$ est $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$, qui figure du côté gauche de l'équation. Tous les termes de la somme possèdent au moins une coordonnée égale à h_i , ce qui permet de la majorer. En notant $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ et, donc, $\|h\|_E = \max_{1 \leq i \leq n} \|h_i\|_{E_i}$,

$$\begin{aligned} \|\Delta\|_G &\leq \sum_{X \subsetneq \llbracket 1, n \rrbracket} \|\varphi[\mathbb{1}_X(1)x_1 + (1 - \mathbb{1}_X(1))h_1, \mathbb{1}_X(2)x_2 + (1 - \mathbb{1}_X(2))h_2, \dots, \mathbb{1}_X(n)x_n + (1 - \mathbb{1}_X(n))h_n]\|_G \\ &\leq \sum_{X \subsetneq \llbracket 1, n \rrbracket} M \left(\prod_{i \in X} \|x_i\|_{E_i} \right) \left(\prod_{i \in X^c} \|h_i\|_{E_i} \right) \leq M \sum_{X \subsetneq \llbracket 1, n \rrbracket} \|x\|_E^{\#X} \|h\|_E^{n - \#X} = \mathcal{O}(\|h\|_E) \quad \text{car } n - \#X \geq 1. \end{aligned}$$

2. On montre la propriété $iii)$. Pour des bases $(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{p_i}^{(i)})$ de E_i et les normes 1 correspondantes sur E_i , on considère

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ avec $x_i = \sum_{k=1}^{p_i} x_k^{(i)} e_k^{(i)}$. Alors,

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \varphi\left(\sum_{k=1}^{p_1} x_k^{(1)} e_k^{(1)}, \sum_{k=1}^{p_2} x_k^{(2)} e_k^{(2)}, \dots, \sum_{k=1}^{p_n} x_k^{(n)} e_k^{(n)}\right) \\ &= \sum_{k_1=1}^{p_1} \sum_{k_2=1}^{p_2} \cdots \sum_{k_n=1}^{p_n} x_{k_1}^{(1)} x_{k_2}^{(2)} \cdots x_{k_n}^{(n)} \varphi(e_{k_1}^{(1)}, e_{k_2}^{(2)}, \dots, e_{k_n}^{(n)}) \quad \therefore \\ \|\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_G &\leq M \sum_{k_1=1}^{p_1} \sum_{k_2=1}^{p_2} \cdots \sum_{k_n=1}^{p_n} |x_{k_1}^{(1)} x_{k_2}^{(2)} \cdots x_{k_n}^{(n)}| \\ &= M \left(\sum_{k_1=1}^{p_1} |x_{k_1}^{(1)}| \right) \left(\sum_{k_2=1}^{p_2} |x_{k_2}^{(2)}| \right) \cdots \left(\sum_{k_n=1}^{p_n} |x_{k_n}^{(n)}| \right) = M \prod_{i=1}^n \|x_i\|_1, \end{aligned}$$

où $M = \max_{\substack{1 \leq k_1 \leq p_1 \\ 1 \leq k_2 \leq p_2 \\ \dots \\ 1 \leq k_n \leq p_n}} \|\varphi(e_{k_1}^{(1)}, e_{k_2}^{(2)}, \dots, e_{k_n}^{(n)})\|_G$.

□