

Déterminant : une construction par récurrence

Il s'agit de justifier, pour un espace vectoriel E de base $(e_1, \dots, e_n)$, l'existence et l'unicité d'une forme n -linéaire alternée ϕ telle que $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Le cas de la dimension 1 est clair : si $E = \text{Vect}(e_1)$, l'application $\phi : xe_1 \mapsto x$ est bien l'unique forme linéaire (alternée...) telle que $\phi(e_1) = 1$.

Idem pour la dimension 2 : si $E = \text{Vect}(e_1, e_2)$, l'application $\phi : (x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$ est bien l'unique forme linéaire (alternée...) telle que $\phi(e_1, e_2) = 1$.

De manière générale, l'unicité découle du fait que l'on est capable de calculer l'image d'un n -uplet par n -linéarité. On obtient une expression polynômiale en les coefficients, affectés de coefficients de la forme $\phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$, qui valent ± 1 selon la permutation σ (les autres termes sont nuls grâce au caractère alterné).

Soit $n \geq 2$, on suppose le résultat établi en dimension $n - 1$ et l'on considère un espace vectoriel E de base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.

Notations :

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, H_i désigne l'hyperplan $\text{Vect}((e_j)_{1 \leq j \leq n, j \neq i})$. p_i désigne le projecteur sur H_i selon $\text{Vect}(e_i)$.

Pour tout $i \neq j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $H_{i,j}$ désigne le sous-espace $\text{Vect}((e_k)_{1 \leq k \leq n, k \neq i, k \neq j})$ de dimension $n - 2$. $p_{i,j}$ désigne le projecteur sur $H_{i,j}$ selon $\text{Vect}(e_i, e_j)$.

Pour une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs, on notera $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les coordonnées de x_n .

Analyse : Soit ϕ une telle forme n -linéaire alternée, si elle existe. Par linéarité selon la n -ème variable, on a pour tout $(x_1, \dots, x_n)$:

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(x_1, \dots, x_{n-1}, e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi(p_i(x_1), \dots, p_i(x_{n-1}), e_i)$$

En effet, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fixé, on a $\phi(x_1, \dots, x_{n-1}, e_i) = \phi(p_i(x_1), \dots, p_i(x_{n-1}), e_i)$, puisque le caractère alterné de ϕ fait que l'ajout d'un multiple de la n -ème variable à chacune des autres n'affecte pas la valeur de ϕ .

Enfin, pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ fixé, l'application $\phi_i : (y_1, \dots, y_{n-1}) \mapsto \phi(y_1, \dots, y_{n-1}, e_i)$ est $n - 1$ -linéaire alternée sur H_i , et vérifie $\phi_i(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) = \phi(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n, e_i) = (-1)^{n-i} \phi(e_1, \dots, e_n)$ par permutation circulaire des $n - i + 1$ derniers vecteurs, soit $\phi_i(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) = (-1)^{n-i}$.

Synthèse : Appliquant l'hypothèse de récurrence, on considère pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la forme $n - 1$ -linéaire alternée ϕ_i sur H_i telle que $\phi_i(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n) = (-1)^{n-i}$ (le terme de signe ne pose pas problème, si ψ est $n - 1$ -linéaire alternée, $-\psi$ aussi).

On définit alors ϕ par $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i(p_i(x_1), \dots, p_i(x_{n-1}))$.

- ϕ est n -linéaire : Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $(x_1, \dots, x_{n-1}) \mapsto \phi_i(p_i(x_1), \dots, p_i(x_{n-1}))$ est $n - 1$ -linéaire, donc ϕ est linéaire par rapport aux $n - 1$ premières variables.

Et pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $x_n \mapsto \alpha_i$ est linéaire (c'est une forme linéaire coordonnée) donc ϕ est linéaire par rapport à la n -ème variable.

- $\phi(e_1, \dots, e_n)$: Lorsqu'on évalue en $(e_1, \dots, e_n)$, seul le dernier terme de la somme est non nul car alors $\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$. Enfin $\alpha_n = 1$, et $\phi_n(p_n(e_1), \dots, p_n(e_{n-1})) = \phi_n(e_1, \dots, e_{n-1}) = (-1)^0 = 1$, donc $\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$.

- ϕ est alternée :

S'il existe $j < k \in \llbracket 1; n - 1 \rrbracket$ tels que $x_j = x_k$, alors pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $\phi_i(p_i(x_1), \dots, p_i(x_{n-1})) = 0$ car ϕ_i est alternée. Il vient $\phi(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Reste à examiner le cas où il existe $j \leq n - 1$ tel que $x_j = x_n$. Pour simplifier les notations, supposons $j = n - 1$ (les autres cas se traitent de façon similaire). $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont alors aussi les coordonnées de x_{n-1} .

Développant par linéarité selon la $n - 1$ -ème variable chaque terme de la somme, il vient comme $p_i(x_{n-1}) = \sum_{j \neq i} \alpha_j e_j$:

$$\begin{aligned} \phi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j \neq i} \alpha_j \phi_i(p_i(x_1), \dots, p_i(x_{n-2}), e_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j \neq i} \alpha_j \phi_i(p_{i,j}(x_1), \dots, p_{i,j}(x_{n-2}), e_j) \\ &\quad \text{(par ajout d'un multiple de la dernière variable aux autres)} \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j (\phi_i(p_{i,j}(x_1), \dots, p_{i,j}(x_{n-2}), e_j) + \phi_j(p_{i,j}(x_1), \dots, p_{i,j}(x_{n-2}), e_i)) \\ &\quad \text{(en regroupant les termes deux à deux)} \end{aligned}$$

Soit $i < j$. Pour tous $z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n \in H_{i,j}$, on a

$$\begin{aligned} & \phi_i(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n, e_j) + \phi_j(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n, e_i) \\ &= (-1)^{n-j} \phi_i(z_1, \dots, z_{i-1}, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}, e_j, z_{j+1}, \dots, z_n) + (-1)^{n-i-1} \phi_j(z_1, \dots, z_{i-1}, e_i, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}, z_{j+1}, \dots, z_n) \\ & \quad (\text{par permutation circulaire de } n-j+1 \text{ et } n-i \text{ termes respectivement}) \\ &= ((-1)^{n-j} \times (-1)^{n-i} + (-1)^{n-i-1} \times (-1)^{n-j}) \phi(z_1, \dots, z_{i-1}, e_i, z_{i+1}, \dots, z_{j-1}, e_j, z_{j+1}, \dots, z_n) = 0 \end{aligned}$$

Donc $\phi(x_1, \dots, x_n)$ est nul en tant que somme de termes nuls.

N.B. L'unicité (analyse) implique que si ψ est une autre forme n -linéaire alternée et si $\lambda = \psi(e_1, \dots, e_n)$, alors $\psi = \lambda\phi$.

N.B. Et donc l'espace vectoriel $\Lambda_n(E)$ des formes n -linéaires alternées sur E (où E est de dimension n) est lui de dimension 1.