Chapitre I - TD

Espaces vectoriels et applications linéaires

Les basiques

Exercice 1. Fonctions affines par morceaux (CCP)
Soit $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = 1$ une subdivision de $[\,0\,;1\,]$ et E l'ensemble des fonctions $f : [\,0\,;1\,] \to \mathbb{R}$ continues et affines sur chacun des intervalles $[\,x_k\,;x_{k+1}\,]$.

1. Montrer que E est de dimension finie.
2. Montrer que les fonctions $f_k : t \longmapsto |t - x_k|$ sont élément de E et forment une famille libre. Conclure qu'elles forment une base de E.

Exercice 2. Fonctions trigonométriques (CCP)
Soit $f_k : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos(kx) \end{array}\right.$ et $g_k : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \cos^k(x) \end{array}\right.$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathrm{Vect}\ (f_k)_{0 \leq k \leq n} = \mathrm{Vect}\ (g_k)_{0 \leq k \leq n}$.
Montrer que $(g_k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre et en déduire que $(f_k)_{0 \leq k \leq n}$ également.

Exercice 3. Une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ (Mines)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ une famille de nombres complexes deux à deux distincts. Montrer que la famille $((\mathrm{X} - z_k)^n)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

Exercice 4. Une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ (CCP)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, soit $\mathrm{P}_k = \mathrm{X}^k\,(1 - \mathrm{X})^{n-k}$. Montrer que $(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$. Exprimer dans cette base les polynômes de la base canonique (on pourra calculer la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{P}_k$, et généraliser).

Exercice 5. Intersection et supplémentaires
Soit $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{E}_n$ et F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, soit $\mathrm{F}_i = \mathrm{F} \cap \mathrm{E}_i$.
Montrer que la somme $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_n$ est directe, la comparer à F.

Exercice 6. Projecteurs de même noyau
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f, g \in \mathcal{L}\,(\mathrm{E})$. Montrer que $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$ ssi f et g sont des projecteurs de même noyau.

Exercice 7. Somme de deux projecteurs
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $p, q \in \mathcal{L}\,(\mathrm{E})$ deux projecteurs.

1. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Si tel est le cas, montrer que $\mathrm{Ker}\ (p+q) = \mathrm{Ker}\ p \cap \mathrm{Ker}\ q$ et $\mathrm{Im}\ (p + q) = \mathrm{Im}\ p\ \oplus\ \mathrm{Im}\ q$.

Exercice 8. Pseudo-inverse
Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

1. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\ f \oplus \mathrm{Im}\ g$.
2. Montrer que $f\,(\mathrm{Im}\ g) = \mathrm{Im}\ f$.

Exercice 9. Réduction via des projecteurs
Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}\,(\mathrm{E})$. On suppose trouvés $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tels que $(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \circ (f - \lambda_2 \mathrm{Id}_\mathrm{E}) = 0$. On considère les endomorphismes

$$p = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(f - \lambda_1 \mathrm{Id}_\mathrm{E}) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(f - \lambda_2 \mathrm{Id}_\mathrm{E})$$

1. Montrer que p et q sont des projecteurs.
2. Expliciter $p + q$, $p \circ q$ et $q \circ p$.
3. Exprimer f en fonction de p, q, λ_1 et λ_2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de f^n en fonction de ces mêmes paramètres.

Exercice 10. Centre de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que pour tout $x \in \mathrm{E}$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. Déterminer les endormorphimes $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ vérifiant la propriété : $\forall v \in \mathcal{L}(\mathrm{E}), u \circ v = v \circ u$. (on montrera qu'un tel endomorphisme laisse stable toute droite de E).

Exercice 11. Image et noyaux (CCP)
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E de dimension finie. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{F}$ et $\ker f = \mathrm{G}$.

Exercice 12. Somme de projecteurs
Soient $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs de l'espace E tels que:

$$\forall i \neq j,\ p_i \circ p_j = 0 \quad \text{et} \quad p_1 + \cdots + p_n = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

Montrer que $\mathrm{E} = \bigoplus\limits_{1 \leq i \leq n} \mathrm{Im}\ p_i$ et que les p_i sont les projecteurs associés à cette décomposition de E.

Exercice 13. Sous espace stable et projecteurs
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces supplémentaires. On note p (resp. q) le projecteur sur F selon G (resp. sur G selon F). Montrer que F est stable par $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

Pour aller plus loin

Exercice 14. Sous-espaces en somme directe
Soit $\alpha_1 < \alpha_n < \ldots < \alpha_n \in \mathbb{R}$. Pour tout $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$, on note E_k l'ensemble des fonctions de la forme $x \longmapsto \mathrm{P}(x)e^{\alpha_k x}$, où P est un polynôme.

Montrer que les E_k sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et qu'ils sont en somme directe.

Exercice 15. Supplémentaire commun (Mines)
Soit F et G deux sous-espaces vectoriel d'un espace E de dimension finie. On suppose que $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{G}$. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun.

Exercice 16. Réunion de sous-espaces vectoriels stricts
Soit $n \geq 2$ et $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n$ n sous-espaces vectoriels de E strictement inclus dans E. On suppose que n est minimal tel que $\mathrm{E} = \displaystyle\bigcup_{k \in [\![1 \,;\, n]\!]} \mathrm{F}_k$,

1. Montrer que $n \neq 2$.
2. Justifier que l'on peut choisir un élément x de F_n n'appartenant pas à $\mathrm{F}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{F}_{n-1}$, ainsi qu'un élément y de E n'appartenant pas à F_n.
3. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + y \notin \mathrm{F}_n$.
4. Montrer que pour tout entier $i \in [\![1 \,;\, n-1]\!]$, il existe au plus un $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda_i x + y \in \mathrm{F}_i$.
5. Conclure à une contradiction.

Exercice 17. Endomorphisme de polynômes (X-ESPCI)
Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Montrer qu'il existe un unique $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{Q}(0) = 0$ et $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) - \mathrm{Q}(\mathrm{X}-1) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$.

Exercice 18. Sous-espaces stables (Mines)
Soit p un projecteur d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Montrer que les sous-espaces de E stables par p sont sommes (directes) d'un sous-espace du noyau et d'un sous-espace de l'image de p.

Exercice 19. Supplémentaire stable (Centrale)
Soient E un espace vectoriel, V un sous-espace vectoriel de E, p un projecteur d'image V. Soit u un endomorphisme de E tel que $u^n = \mathrm{Id}$ et $u(\mathrm{V}) \subset \mathrm{V}$.

On pose $q = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k}$.

1. Montrer que $u \circ q = q \circ u$.
2. Montrer que $q \circ p = p$.
3. Montrer que q est un projecteur.
4. Déterminer l'image de q. En déduire l'existence d'un supplémentaire de V stable par u.

Exercice 20. Racine cubique de l'identité
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que $f^3 = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Im}\,(f^2 + f + \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Im}\,(f - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(f^2 + f + \mathrm{Id})$.
3. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - j\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - j^2\mathrm{Id})$, et en déduire que $\mathrm{Ker}\,(f^2 + f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(f - j\mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - j^2\mathrm{Id})$

Exercice 21. Image, noyau (Mines) Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont supplémentaires si et seulement si $u \in \mathrm{Vect}\,(u^2, u^3, \ldots)$.

Exercice 22. Rang de composées (Centrale)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f, g, h trois endomorphismes de E.

1. Justifier l'existence d'un sous-espace F de $\mathrm{Ker}\,(f \circ g \circ h)$ tel que $\mathrm{Ker}\,(f \circ g \circ h) = \mathrm{Ker}\,(g \circ h) \oplus \mathrm{F}$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}\,(g \circ h) + \mathrm{rg}\,(f \circ g) \leq \mathrm{rg}\,(f \circ g \circ h) + \mathrm{rg}\,(g)$.

   [On pourra montrer que $h(\mathrm{F})$ est en somme directe avecKer g dans $\mathrm{Ker}\,(f \circ g)$.]

Exercice 23. Endomorphismes cycliques
Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose qu'il existe un vecteur u (non nul) tel que la famille $\big(f^k(u)\big)_{k \in \mathbb{N}}$ est génératrice.

1. Soit p maximal tel que la famille $\big(u, f(u), \ldots, f^{p-1}(u)\big)$ est libre. Montrer que cette famille est aussi génératrice.
2. En déduire que $\big(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u)\big)$ est une base.
3. Soit g un endomorphisme qui commute avec f. Justifier qu'il existe un polynôme P tel que $g(u) = (\mathrm{P}(f))(u)$, puis montrer que $g = \mathrm{P}(f)$.
4. Dimension de $\mathrm{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(\mathrm{E}) \,|\, f \circ g = g \circ f\}$?

Exercice 24. Rang d'une composée
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, et $f, g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que $\dim \mathrm{Ker}\,(g \circ f) \leq \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, g$.
2. Montrer que $\dim\,(\mathrm{Im}\, f \cap \mathrm{Ker}\, g) = \mathrm{rg}\, f - \mathrm{rg}\,(g \circ f)$.
3. En déduire l'encadrement $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}\, g - \dim \mathrm{E} \leq \mathrm{rg}\,(g \circ f) \leq \min\,(\mathrm{rg}\, f, \mathrm{rg}\, g)$.

Exercice 25. Composée de nilpotents (Centrale)
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une famille d'endomorphismes nilpotents qui commutent deux à deux. Montrer que $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_n = 0$.

[On pourra majorer le rang de $u_1 \circ u_2 \circ \ldots \circ u_k$, pour tout k, par récurrence.]