

Chapitre II - TD

Matrices

Les basiques

Exercice 1. Calcul d'inverse

Inverser si possible les matrices suivantes :

- $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où $a_{i,j} = j - i + 1$ si $j \geq i$, 0 sinon.
- $(1 - \delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$
- $(a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$ où $a_{i,j} = \binom{i-1}{j-1}$ en convenant que $\binom{i}{j} = 0$ si $i < j$.

Exercice 2. Racines carrées matricielles

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que toute matrice qui commute avec A est diagonale. Résoudre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'équation $X^2 = A$.
2. Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec B puis résoudre l'équation $X^2 = B$.

Exercice 3. Matrices semblables

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que les matrices A et B sont semblables (chercher une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle l'endomorphisme canoniquement associé à A a pour matrice B).
2. En déduire un polynôme annulateur de degré 3 pour A.
3. Pour $n \geq 1$ calculer A^n en fonction de I_3 , A et A^2 .

Exercice 4. Équation polynômiale (CCP)

Soient A et B deux matrices réelles carrées d'ordre n telles qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(0) = 1$ et $AB = P(A)$.

Montrer que A est inversible et que A et B commutent.

Exercice 5. Équation matricielle

Résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'équation matricielle $X + \text{tr}(X)A = B$, d'inconnue X.

Exercice 6. Matrices de transvection

Soit $n \geq 2$, on note $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Pour $i \neq j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $\alpha \in \mathbb{K}$, montrer que la matrice de transvection $I_n + \alpha E_{i,j}$ est inversible.

2. Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 7. Centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Calculer les produits $ME_{i,j}$ et $E_{i,j}M$, pour $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
2. On suppose que M commute avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que M est une matrice scalaire.

Exercice 8. Simplification ?

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AXB = 0$$

Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

Exercice 9. Matrices de rang 1

Soit M une matrice carrée de taille n et de rang 1.

1. Montrer que M s'écrit $M = UV^T$, avec U et V deux matrices colonnes. En déduire que $M^2 = \text{Tr}(M)M$.
2. Lorsque $M^2 = 0$, montrer que la matrice M est semblable à la matrice élémentaire $E_{2,1}$.
3. Dans le cas contraire, montrer que M est semblable à la matrice $\text{Diag}(\alpha, 0, \dots, 0)$, où $\alpha = \text{Tr}(M)$.

Exercice 10. Matrices par blocs semblables (CCP)

Soient N_1 et N_2 deux matrices carrées nilpotentes de tailles respectives p_1 et p_2 , U_1 et U_2 deux matrices inversibles de tailles respectives q_1 et q_2 .

Soient $M_1 = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} N_2 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$.

Montrer que M_1 et M_2 sont semblables si et seulement si $p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ et si N_1 et U_1 sont respectivement semblables à N_2 et U_2 .

Exercice 11. Diagonale dominante (Mines)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $L_i = \sum_{k \neq i} |a_{i,k}|$.

Lorsque $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, |a_{i,i}| > L_i$, montrer que A est inversible.

Exercice 12. Matrices diagonales (Centrale)

Soient $\mathcal{D}_n$ l'espace des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{Diag}(d_1, \dots, d_n)$, où les d_i sont des réels distincts.

1. Montrer que $(I_n, D, \dots, D^{n-1})$ est une base de $\mathcal{D}_n$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MD = DM$. Montrer que M est diagonale.

Pour aller plus loin

Exercice 13. Calcul d'inverse (Mines)

On définit $\omega = e^{2i\pi/(n+1)}$ et $u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (P(\omega^k))_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1}$.

1. Montrer que u est un isomorphisme et trouver la matrice U de u dans les bases canoniques.
2. Calculer, pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\sum_{m=0}^n P(\omega^m) \omega^{-km}$.
3. En déduire U^{-1} .

Exercice 14. Matrices de trace nulle (Mines)

Soit $n \geq 2$. Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{tr } M = 0\}$ et $N = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M^n = 0\}$.

Montrer que $\text{Vect}(N) = H$.

Exercice 15. Caractérisation de la trace (Mines)

Soit un entier $n \geq 1$ et φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(MN) = \varphi(NM)$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda \text{tr}$. [Utiliser la base canonique.]

En déduire que le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices du type $MN - NM$ est un hyperplan.

Exercice 16. Matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\text{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que A n'est pas inversible. On pourra justifier que, si tel était le cas, on aurait $I_n \in \text{Vect}(A, A^2, \dots)$.
2. En déduire que A est semblable à une matrice de la forme
$$\begin{pmatrix} 0 & \star & \dots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
. Que vaut $\text{tr}(B^k)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$?
3. Conclure que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et donc que A est nilpotente.

Exercice 17. Crochet de Lie (Mines)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $AB - BA = B$.

1. Montrer que B n'est pas inversible.
2. Calculer $AB^k - B^kA$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. En déduire que B est nilpotente.

Exercice 18. Matrices magiques (Centrale)

Soit J_n la matrice dont tous les coefficients valent 1.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $a_{i,j}$, on note $L_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j}$

et $C_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}$. On dit que A est magique lorsque $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $L_i = C_j = S_n(A)$.

On note X_n l'ensemble des matrices magiques.

Montrer que X_n est l'ensemble des matrices qui commutent avec J_n . Montrer que X_n est un sous-espace stable par produit matriciel et que $S_n(AB) = S_n(A)S_n(B)$.

Calculer la dimension du sous-espace de X_n constitué des matrices A telles que $S_n(A) = 0$.

Exercice 19. Nilpotentes (Mines)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose trouvés $n+1$ complexes $x_1, \dots, x_{n+1}$ tels que $\forall i, A + x_i B$ soit nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Exercice 20. Matrices stochastiques (Centrale)

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs et telle que $\forall i, \sum_{j=1}^n [A]_{i,j} = 1$. On note α le plus petit coefficient de A . Pour tout vecteur colonne X , on note $\min X$ et $\max X$ les plus petit et plus grand coefficients de X .

1. Montrer que, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}^+)$, $\min AY \geq \alpha \max Y$.
2. Montrer, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\min AX \geq \alpha \max X + (1 - \alpha) \min X$ et que $\max AX \leq \alpha \min X + (1 - \alpha) \max X$. Ind. Considérer $Y = X - \min(X)U$ où U un vecteur propre de A bien choisi.
3. En déduire que la suite $(A^k)_k$ converge et préciser le rang de la limite.