Chapitre III - TD

Déterminants

Les basiques

Exercice 1. Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, avec $n \geq 3$. Montrer que la matrice de terme général $\sin(a_i + a_j)$ est de déterminant nul.

Exercice 2. [Mines] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (\min\{i, j\})_{1 \leq i, j \leq n}$. Calculer le déterminant de A .

Exercice 3. À l'aide d'opérations élémentaires, calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2 + b_2 & & a_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_n & \dots & a_n & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n \\ c_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ c_3 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ c_n & 0 & \dots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & 1 + x_2 y_2 & & x_2 y_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & 1 + x_n y_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

Exercice 4. [Mines]

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\det A = \det B = \det(A+B) = \det(A-B) = 0$. Calculer $\det(xA+yB)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soient $a \neq b$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. On pose

$$\Delta_n(x) = \begin{vmatrix} \lambda_1 + x & a + x & \dots & a + x \\ b + x & \lambda_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a + x \\ b + x & \dots & b + x & \lambda_n + x \end{vmatrix}$$

1. Montrer que $\Delta_n(x)$ est une fonction affine de x .
2. Calculer $\Delta_n(x)$ et en déduire $\Delta_n(0)$.
3. Quelle valeur obtient-on lorsque $a = b$?

Exercice 6.

Soient $a_0, \dots, a_n$ des réels. En se ramenant à un déterminant de Vandermonde, calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos a_0 & \cos(2a_0) & \dots & \cos(na_0) \\ 1 & \cos a_1 & \cos(2a_1) & \dots & \cos(na_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \cos a_n & \cos(2a_n) & \dots & \cos(na_n) \end{vmatrix}$$

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Existe-t-il $A \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_{2n+1}$? Même question dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$...

Exercice 8.

1. Soient $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $U + iV \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $U + \lambda V \in GL_n(\mathbb{R})$.
2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour aller plus loin

Exercice 9. [Mines]

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$. Montrer que $\det M \geq 0$.

Exercice 10. [Mines] On définit, pour $n \geq 2$ et $x \in \mathbb{R}$:

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & (0) \\ x^2/2! & x & 1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & x & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}. \text{ Montrer que } D_n$$

est dérivable et calculer D'_n . En déduire la valeur de D_n .

Exercice 11.

$$\text{Soit } P = \prod_{i=1}^n (X - a_i) \text{ et } \delta(x) = \begin{vmatrix} P(x) & & \dots & \dots & P(x) \\ x - a_1 & & & & x - a_n \\ a_1^0 & & & & a_n^0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_1^{n-2} & & \dots & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Calculer $\delta(x)$ et montrer qu'il est indépendant de x .

Exercice 12.

1. Calculer le déterminant et la trace de l'endomorphisme τ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $\tau(M) = M^T$.
2. Idem avec $\varphi : M \mapsto PM$, où P est une matrice fixée.
3. En déduire le déterminant de $\psi : M \mapsto MP$ et celui de $\alpha : M \mapsto PMP^{-1}$, où P est une matrice fixée.