Chapitre IV - TD

Réduction pratique

Pour toutes les matrices qui suivent, déterminer le spectre de l'endomorphisme canoniquement associé, et expliciter les sous-espaces propres. Expliquer pourquoi la matrice est diagonalisable. Donner une matrice diagonale semblable ainsi que la matrice de passage.

$$\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_3 = \begin{pmatrix} -6 & 4 & -16 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_7 = \begin{pmatrix} 7 & -12 & -2 \\ 3 & -4 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{A}_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{A}_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 1/a & 0 & c \\ 1/b & 1/c & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } a,b,c \in \mathbb{C}^* \qquad \mathrm{B}_2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix} \text{ avec } a,b \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}_n \qquad \mathrm{D} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C} \text{ de somme non nulle.}$$

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_n \qquad \mathrm{F} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{G} = \begin{pmatrix} b & 0 & \dots & \dots & 0 & a \\ 0 & \ddots & \ddots & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & \ddots & \ddots & 0 \\ a & 0 & \dots & \dots & 0 & b \end{pmatrix}_{2n} \quad \text{avec } a,b \in \mathbb{R}$$

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a_0,\dots,a_{n-1} \in \mathbb{C}$$