Chapitre IV - TD

Réduction des endomorphismes (et des matrices)

Applications de la réduction

Exercice 1.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $A_n = \begin{pmatrix} 1 & a/n \\ a/n & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n$.

Exercice 2.

1. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'équation $M^2 + M + I_2 = D$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, en déduire les solutions de l'équation $N^2 + N + I_2 = A$.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & 4 & -5 \\ 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

1. Trouver D diagonale et P inversible telles que $A = PDP^{-1}$.
2. Résoudre l'équation $X^2 = D$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. En déduire les solutions de l'équation $X^2 = A$.
4. Déterminer les sous-espaces vectoriels stables par A (i.e. par l'endomorphisme canoniquement associé).

Exercice 4. On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -7 \\ 1 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Trigonaliser A .
2. Déterminer les sous-espaces stables par A . (On pourra discuter selon le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit.)

Diagonalisable ou non ?

Exercice 5.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Montrer que M est diagonalisable ssi A et B le sont.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ semi-simple, c'est-à-dire tel que tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable. Montrer que u est diagonalisable.

Exercice 7.

Trouver le spectre de $A = \begin{pmatrix} & & & b_1 \\ & (0) & & \vdots \\ & & & b_{n-1} \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$.
À quelle condition est-elle diagonalisable (dans $\mathbb{R}$) ?

Exercice 8.

Soient $a_1, \dots, a_{2n} \in \mathbb{C}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{2n} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Lorsque $a_1, \dots, a_{2n}$ sont non nuls, montrer que A est diagonalisable. On pourra se ramener à diagonaliser des matrices de taille 2.

Préciser les valeurs de $(a_1, \dots, a_{2n})$ pour lesquels A est diagonalisable.

Exercice 9. Soit $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer son polynôme caractéristique χ_A . Montrer que A est diagonalisable ssi χ_A est scindé à racines simples.

Exercice 10.

Soit A une matrice carrée de taille n et $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A \end{pmatrix}$.

Calculer $P(M)$, pour P un polynôme. À quelle condition sur A la matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 11.

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a & \dots & \dots & a \\ b & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & \dots & b & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \neq b$ deux complexes non nuls.

Calculer son polynôme caractéristique et justifier que A est diagonalisable.

Exercice 12.

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $M \neq I_3$ et $M^3 = I_3$.

1. Quelles sont les valeurs propres complexes de M ?

2. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ puis dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Endomorphismes d'espaces de polynômes, matrices...**Exercice 13.**

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et Φ l'endomorphisme de E défini par

$$\Phi : P \longmapsto P(1 - X)$$

Montrer que Φ est diagonalisable. Déterminer ses sous-espaces propres.

Exercice 14.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$ défini par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad f(M) = AM$$

1. Préciser l'endomorphisme $P(f)$, pour $P \in \mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que f est diagonalisable ssi A l'est.
3. Montrer que f est nilpotent ssi A l'est.
4. Décrire les sous-espaces propres de f .

Exercice 15.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice donnée et u l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad u(M) = \text{tr}(A)M + (\text{tr } M)A$$

Déterminer les éléments propres de u . Est-il diagonalisable ?

Exercice 16.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et p un projecteur de E . On définit l'application

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ f \longmapsto p \circ f + f \circ p \end{cases}$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de Φ .

Pour aller plus loin**Exercice 17.**

Soit $E = \mathbb{R}_{2n}[X]$, avec $n \in \mathbb{N}$.

1. Vérifier que l'application $\Phi : P \longmapsto (X^2 - 1)P' - 2nXP$ est un endomorphisme de E .
2. Dessiner sa matrice dans la base canonique.
3. Déterminer les éléments propres de Φ . Est-il diagonalisable ?

Exercice 18.

1. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $J^2 = -I_n$. Montrer que n est pair.
2. Montrer que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; donner ses valeurs propres et leurs multiplicités.

3. Montrer que J est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à $J_0 = \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$, où $m = n/2$.

4. Montrer que J est semblable à J_0 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 19.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $M^3 = -M$ et $\text{rg}(M) = 2n$.

$$\text{Montrer que } M \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 20.

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que A^2 est diagonalisable. Montrer que A l'est encore.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ soit diagonalisable et $P'(A)$ inversible. Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 21.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. Montrer que B est diagonalisable ssi A est diagonalisable et $1 \notin \text{Sp}(A)$.

Exercice 22. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A et B n'ont aucune valeur propre en commun si et seulement si $\chi_A(B)$ est inversible.
2. On suppose trouvée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$. Montrer que, pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$, on a $P(A)M = MP(B)$. En déduire que A et B ont une valeur propre en commun.

Exercice 23.

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable et $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B .

Exercice 24. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stochastique, i.e. telle que $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, m_{i,j} \geq 0$ et $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \sum_{j=1}^n m_{i,j} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre.
2. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre, alors $|\lambda| \leq 1$.
3. Si de plus $\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, m_{i,j} > 0$, alors 1 est la seule valeur propre de module 1.

Exercice 25. Soit u, v deux endomorphismes d'un $\mathbb{C}$ -ev E de dimension finie et $\alpha \in \mathbb{C}^*$ tels que $v \circ u - u \circ v = \alpha u$.

Montrer que u et v possèdent un vecteur propre commun.

En déduire que u et v sont co-trigonalisables, puis que u est nilpotent.

Exercice 26.

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E . Montrer que u n'est pas diagonalisable si et seulement s'il existe un plan P de E stable par u et une base de P dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit par u sur P est de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$