Intégrales de Wallis

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit l'intégrale de Wallis $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, \mathrm{d}t$.

1 Définition, relation de récurrence, calcul

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n t \, \mathrm{d}t$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathrm{W}_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathrm{W}_{2n} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ et $\mathrm{W}_{2n+1} = \dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
4. Montrer que $(\mathrm{W}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et que $\mathrm{W}_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \mathrm{W}_n$.
5. En déduire que $n\mathrm{W}_n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \pi/2$, puis un équivalent simple de W_n.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ converge, et calculer sa valeur à l'aide d'un changement de variable bien choisi.

2 Application à la formule de Stirling

7. **[Question facultative]**

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\displaystyle\int_0^1 \ln t \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{1/n}^1 \ln t$.

   En déduire que $\dfrac{\ln(n!) - n\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$, soit $\ln(n!) = n\ln n - n + o(n)$.
8. **[Question facultative]**

   On pose $u_n = \ln(n!) - n\ln n + n$. Montrer que $v_n - v_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, en déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{2}$.
9. On pose $v_n = \ln(n!) - n\ln n + n - \dfrac{\ln n}{2}$. Montrer que $v_n - v_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{12n^2}$. En déduire que la suite (v_n) converge.

   Montrer que $n! = n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{\ell}e^{o(1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{n}e^{\ell}$, où $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
10. On note $\mathrm{C} = e^{\ell}$. Justifier que $\mathrm{W}_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi}{\mathrm{C}\sqrt{2n}}$, et que d'autre part $\mathrm{W}_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{4n}}$.

    Conclure que $\mathrm{C} = \sqrt{2\pi}$.

3 Application au calcul de l'intégrale de Gauss

11. **Une méthode par encadrement**

    Montrer que, pour tout $x \in [\,0\,;\sqrt{n}\,]$, on a $\left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n \leq e^{-x^2}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $e^{-x^2} \leq \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$.
12. Exprimer les intégrales $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \mathrm{d}x$ et $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}$ à l'aide des intégrales de Wallis.
13. Calculer l'intégrale de Gauss $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
14. **Une méthode par convergence dominée**

    Justifier que $\mathrm{J}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x$ et retrouver la valeur de cette intervalle.