Polynômes de Tchebychev

1 Définition, degré, racines

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En développant $(cosx + i\sin x)^n$, montrer qu'il existe un polynôme T_n tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{T}_n(\cos x) = \cos nx$.
2. Montrer l'unicité d'un tel polynôme.
3. Préciser $\mathrm{T}_0, \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2$ et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{T}_{n-1} + \mathrm{T}_{n+1} = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_n$.
4. En déduire le degré et le coefficient dominant de T_n. Préciser son terme constant. [On discutera selon la parité de n.]
5. Préciser les racines de T_n et en déduire sa forme factorisée.

2 Propriétés diverses

6. **Équation différentielle :** Montrer que $\left(1 - \mathrm{X}^2\right)\mathrm{T}_n'' - \mathrm{X}\mathrm{T}_n' + n^2\mathrm{T}_n = 0$.
7. **Série génératrice :** Montrer que pour tout $x, t \in \,]-1\,;1\,[$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{T}_n(x)t^n = \dfrac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}$.
8. **Produit scalaire :** Montrer que $(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \mapsto \langle \mathrm{P}|\mathrm{Q}\rangle = \int_{-1}^{1} \dfrac{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$. [On vérifiera notamment que l'application est bien définie.] Montrer que la famille $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.
9. **Caractérisation par les oscillations :**
   (a) Déterminer $\|\mathrm{T}_n\|_{\infty,[\,-1\,;1\,]}$.
   Inversement, soit P un polynôme de degré n vérifiant $\|\mathrm{P}\|_{\infty,[\,-1\,;1\,]} = 1$. On suppose de plus qu'il existe $-1 = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = 1$ tels que $\forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]$, $|\mathrm{P}(a_k)| = 1$. Quitte à changer P en $-\mathrm{P}$, on peut supposer $\mathrm{P}(1) = 1$.
   (b) Justifier que $1 - \mathrm{P}^2$ admet $a_1 < \ldots < a_{n-1}$ comme racines doubles, ainsi que 1 et -1 comme racines simples.
   (c) En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ tel que $1 - \mathrm{P}^2 = -\alpha^2(\mathrm{X}^2 - 1)\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{X} - a_i)^2$.
   (d) Justifier que $a_1 < \ldots < a_{n-1}$ sont racines de P' puis qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $\mathrm{P}' = \varepsilon n\alpha\prod_{i=1}^{n-1}(\mathrm{X} - a_i)$.
   (e) En déduire que, pour tout $k \in [\![\,1\,;\,n\,]\!]$, on a $\forall x \in \,]\,a_{k-1}\,; a_k\,[\,,\ \dfrac{\mathrm{P}'(x)}{\sqrt{1 - \mathrm{P}^2(x)}} = \dfrac{\varepsilon n}{\sqrt{1 - x^2}}$, et donc une constante c_k telle que $\forall x \in \,]\,a_{k-1}\,; a_k\,[\,,\ \arccos(\mathrm{P}(x)) = \varepsilon n \arccos x + c_k$.
   (f) Par un argument de continuité, justifier que les constantes c_k sont toutes égales, et nulles.
   (g) Conclure que $\forall x \in [\,-1\,;1\,]\,,\ \mathrm{P}(x) = \cos\left(n \arccos x\right)$.

3 Meilleure approximation de Lagrange

Dans toute cette section, f désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[\,-1\,;1\,]$ et $x_0 < \ldots < x_n$ des réels.

10. Expliciter un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\forall k \in [\![\,0\,;\,n\,]\!]\,,\ \mathrm{P}(x_k) = f(x_k)$.
11. Montrer que pour tout $x \in [\,-1\,;1\,]$, il existe $\xi \in \,]\,-1\,;1\,[$ tel que $f(x) - \mathrm{P}(x) = \dfrac{\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)$.

    [Pour $x \notin \{x_0, \ldots, x_n\}$, on pourra introduire $\mathrm{K} = \dfrac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n}(x - x_k)}\left(f(x) - \mathrm{P}(x)\right)$ et remarquer que la fonction $t \mapsto f(t) - \mathrm{P}(t) - \mathrm{K}\dfrac{\prod_{k=0}^{n}(t - x_k)}{(n+1)!}$ s'annule en $n + 2$ points distincts.]
12. En déduire que pour tout $x \in [\,-1\,;1\,]$ $|f(x) - \mathrm{P}(x)| \leq \dfrac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|_{\infty,[\,-1\,;1\,]}\|\mathrm{Q}\|_{\infty,[\,-1\,;1\,]}$, où $\mathrm{Q} = \prod_{k=0}^{n}(\mathrm{X} - x_k)$.
13. Soit $\overline{\mathrm{T}_{n+1}}$ le polynôme unitaire associé à T_{n+1}. Justifier que $\|\overline{\mathrm{T}_{n+1}}\|_{\infty,[\,-1\,;1\,]} = \dfrac{1}{2^n}$.
14. On suppose $\|\mathrm{Q}\|_{\infty,[\,-1\,;1\,]} < \dfrac{1}{2^n}$. Justifier que $\overline{\mathrm{T}_{n+1}} - \mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ change $n + 1$ fois de signe. Conclure à une contradiction.

    On a ainsi montré que la majoration de l'erreur d'interpolation est optimale lorsqu'on choisit pour $x_0, \ldots, x_n$ les racines de T_{n+1}.