Théorème de Fubini, version intégrales

1 Sur un rectangle

Soit $[\,a\,;b\,]$ et $[\,c\,;d\,]$ deux segments et f une fonction continue (de deux variables) à valeur dans $\mathbb{C}$.

On note u la fonction $u : \left\{ \begin{array}{rcl} [\,a\,;b\,]\times[\,c\,;d\,] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (\mathrm{X},t) & \longmapsto & \int_a^{\mathrm{X}} f(x,t)\mathrm{d}x \end{array} \right.$.

1. Pour $\mathrm{X}\in[\,a\,;b\,]$, montrer que $t\mapsto u(\mathrm{X},t)$ est continue.
2. Pour $t\in[\,c\,;d\,]$, justifier que $\mathrm{X}\mapsto u(\mathrm{X},t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa dérivée.
3. En appliquant le théorème de régularité des intégrales à paramètre, montrer que $\mathrm{F} : \mathrm{X}\mapsto \int_c^d \left(\int_a^{\mathrm{X}} f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et préciser sa dérivée.
4. Conclure que $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t$ (formule de Fubini).

2 Sur $\mathbb{R}_+^2$, cas positif

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^2$, à valeurs réelles positives. On suppose que

- pour tout $y\in\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ converge, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ converge.
- les fonctions $g : y\mapsto \int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ et $h : x\mapsto \int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
- g est intégrable, autrement dit $\mathrm{I} = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$ converge.

On se propose de montrer qu'alors h est intégrable et que

$$\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

5. Soit $\mathrm{X},\mathrm{Y}\geq 0$. À l'aide du théorème de continuité des intégrales à paramètre, montrer que les fonctions $y\mapsto\int_0^{\mathrm{X}} f(x,y)\mathrm{d}x$ et $x\mapsto\int_0^{\mathrm{Y}} f(x,y)\mathrm{d}y$ sont continues sur $\mathbb{R}_+$.
6. On suppose h non intégrable, c'est-à-dire que $\int_0^{\mathrm{X}} h(x)\mathrm{d}x \xrightarrow[\mathrm{X}\to+\infty]{} +\infty$. On fixe alors $\mathrm{X}>0$ tel que $\int_0^{\mathrm{X}} h(x)\mathrm{d}x > \mathrm{I}$.

   Soit $(\mathrm{Y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, de limite $+\infty$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $h_n : x\mapsto\int_0^{\mathrm{Y}_n} f(x,y)\mathrm{d}y$.

   (a) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $\int_0^{\mathrm{X}} h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\mathrm{X}} h$.

   (b) En déduire qu'il existe $\mathrm{Y}>0$ tel que $\int_0^{\mathrm{X}}\left(\int_0^{\mathrm{Y}} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x > \mathrm{I}$.

   (c) Conclure à une contradition.
7. Soit $\mathrm{Y}\geq 0$. Justifier que la fonction $\mathrm{X}\mapsto\int_0^{\mathrm{X}}\left(\int_0^{\mathrm{Y}} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ est croissante, majorée par I.

   En déduire que $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\mathrm{Y}} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$ converge.
8. Soit $\mathrm{Y}\geq 0$ et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, de limite $+\infty$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note $g_n : y\mapsto\int_0^{\mathrm{X}_n} f(x,y)\mathrm{d}x$.

   (a) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $\int_0^{\mathrm{Y}} g_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\mathrm{Y}} g$.

   (b) En déduire que $\int_0^{\mathrm{X}_n}\left(\int_0^{\mathrm{Y}} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{\mathrm{Y}}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

   (c) Conclure que $\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{\mathrm{Y}} f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^{\mathrm{Y}}\left(\int_0^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.
9. (a) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $\int_0^{+\infty} h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} h$.

   (b) Conclure que $\int_0^{+\infty} h = \mathrm{I}$.