

Noyaux et images itérés

Dans tout le problème, E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel et u un endomorphisme de E .

1 Généralités

1. Montrer que la suite $(\text{Ker } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante au sens de l'inclusion, et que la suite $(\text{Im } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante au sens de l'inclusion.
2. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1}$.
Montrer que $\forall k \geq p, \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1}$. En déduire que $\forall k \geq p, \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^p$.
3. On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Im } u^p = \text{Im } u^{p+1}$.
Montrer que $\forall k \geq p, \text{Im } u^k = \text{Im } u^{k+1}$. En déduire que $\forall k \geq p, \text{Im } u^k = \text{Im } u^p$.

2 En dimension finie

Désormais E est supposée de dimension finie n .

4. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1}$. [On pourra raisonner sur la suite des dimensions.]
5. Montrer qu'on a alors également $\text{Im } u^p = \text{Im } u^{p+1}$.
6. Montrer que $\text{Ker } u^p$ et $\text{Im } u^p$ sont supplémentaires.
Justifier que $\text{Ker } u^p$ et $\text{Im } u^p$ sont stables par u , et que les endomorphismes induits par u sur ces sous-espaces sont respectivement nilpotent et bijectif.
7. (plus dur) On veut montrer que la suite $(\dim \text{Ker } u^{k+1} - \dim \text{Ker } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
Pour cela, on fixe $k \in \mathbb{N}$. Soit F un supplémentaire de $\text{Ker } u^{k+1}$ dans $\text{Ker } u^{k+2}$.
 - (a) Montrer que $u(F)$ est en somme directe avec $\text{Ker } u^k$ et que $\text{Ker } u^k \oplus u(F) \subset \text{Ker } u^{k+1}$.
 - (b) Montrer que $\dim u(F) = \dim F$.
 - (c) Conclure.
 - (d) En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}, \dim \text{Ker } u^k \leq k \dim \text{Ker } u$.

3 Applications diverses

8. On suppose u nilpotent et $\dim \text{Ker } u = 1$. Montrer que l'indice de nilpotence de u est exactement n .
9. Inversement, on suppose u nilpotent d'indice n . Montrer que u est de rang $n - 1$.
10. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \text{Sp}(f)$. On note $u = f - \lambda \text{Id}_E$ et $p \in \mathbb{N}$ tel que $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1}$. On a donc $E = \text{Ker } u^p \oplus \text{Im } u^p$.
 - (a) Montrer que $\text{Ker } u^p$ et $\text{Im } u^p$ sont stables par f .
 - (b) Montrer que λ est l'unique valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\text{Ker } u^p$, et que λ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme induit par f sur $\text{Im } u^p$.
 - (c) En déduire que la dimension de $\text{Ker } u^p$ est égale à la multiplicité de λ .