Modélisation de comptages par un loi de Poisson

On admet généralement que le nombre d'occurences d'un phénomène pendant un laps de temps donné, sous l'hypothèse que ces événements se produisent avec une fréquence moyenne λ connue et indépendemment du nombre d'occurence précédentes et du temps écoulé depuis la dernière occurence, suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Par exemple, le nombre de désintégrations radioactives dans un quantité donné de matière, le nombre d'arrivées de personnes dans une file d'attente, etc.

Il s'agit ici d'éclairer cette modélisation.

Admettons l'existence d'un espace probabilisé permettant l'étude d'un tel phénomène, avec $\mathrm{A}(n,s,t)$ l'événement "n succès dans l'intervalle de temps $[\,s\,;t\,[$" et les propriétés suivantes :

- $\mathrm{A}(m,r,s)$ et $\mathrm{A}(n,s,t)$ indépendants pour tous $m,n \in \mathbb{N}$ et $r \leq s \leq t$. (Le nombre de succès dans l'intervalle de temps $[\,r\,;s\,[$ n'influence pas celui durant l'intervalle de temps $[\,s\,;t\,[$).
- $\mathrm{P}(\mathrm{A}(n,s,t)) = p_n(t-s)$ ne dépend que de n et de $t-s$. (Hypothèse d'invariance dans le temps).
- p_0 continue et $p_0(0) = 1$. (Si la durée est nulle, le nombre de succès aussi).
- Pour tout $t \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1$. (Le nombre de succès est fini presque sûrement).
- $1 - p_0(t) - p_1(t) = o_0(p_1(t))$.
  (La probabilité d'avoir deux succès ou plus est négligeable devant celle d'en avoir 1 lorsque $t \to 0$).

1. Soit $\lambda > 0$. Montrer que $\mathrm{P}(\mathrm{A}(n,s,t)) = e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{(\lambda(t-s))^n}{n!}$ est solution du problème.

   On cherche à montrer que réciproquement que toute solution est de cette forme.
2. Justifier que p_0 est décroissante, et vérifie $\forall s,t \geq 0,\ p_0(s+t) = p_0(s)p_0(t)$.
3. On suppose trouvé $t_0 \geq 0$ tel que $p_0(t_0) = 0$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ p_0(t_0/k) = 0$ et conclure à une contradiction.
   En déduire que p_0 est à valeurs strictement positives.
4. On a ainsi $\forall s,t \geq 0,\ \ln p_0(s+t) = \ln p_0(s) + \ln p_0(t)$. Montrer que $\ln p_0$ est linéaire donc p_0 de la forme $t \mapsto e^{-\lambda t}$.
5. Montrer que $p_1(t) \underset{t\to 0}{\sim} \lambda t$ puis que $\forall n \geq 2,\ p_n(t) = o(t)$.
6. Justifier que $\forall s,t \geq 0,\ p_n(s+t) = \sum_{k=0}^{n} p_k(s)p_{n-k}(t)$, puis que $p_n(t+s) = (1-\lambda s + o(s))p_n(t) + \lambda s p_{n-1}(t) + o(s)$.
   Conclure que $\dfrac{1}{s}\left(p_n(t+s) - p_n(t)\right) \xrightarrow[s\to 0]{} \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)) = p_n'(t)$.
   Ainsi p_n est solution de l'équation différentielle $p_n' + \lambda p_n = \lambda p_{n-1}$, avec la condition initiale $p_n(0) = 0$.
7. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0,\ p_n(t) = e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^n}{n!}$.

Ainsi, si X désigne le nombre de succès dans l'intervalle de temps $[\,0\,;\mathrm{T}\,[$, on a *a priori* $\mathrm{X}(\Omega) = \mathbb{N}$, et pour tout entier n on a $\mathrm{P}(\mathrm{X} = n) = p_n(\mathrm{T}) = e^{-\lambda\mathrm{T}}\dfrac{(\lambda\mathrm{T})^n}{n!}$, c'est-à-dire que $\mathrm{X} \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda\mathrm{T})$.