Fonction Gamma d'Euler

On rappelle que la fonction Γ est définie, sous réserve de convergence, par $\Gamma : z \mapsto \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.

1 Étude de la fonction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.
   Préciser les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Pour $x > 0$, calculer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$.
3. Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   [Plus dur, montrer que Γ est continue sur $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Pour cela, on pourra fixer $z \in \mathrm{D}$, une suite (z_n) à valeur dans D de limite z et utiliser le théorème de convergence dominée.]
4. Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on a $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$.
5. En déduire que Γ est convexe.
6. À l'aide du théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\alpha \in \,]\,1\,;2\,[$ tel que Γ est décroissante sur $]\,0\,;\alpha\,]$, croissante sur $[\,\alpha\,;+\infty\,[$.
7. Justifier que Γ admet une limite en $+\infty$ et donner sa valeur. [On pourra utiliser la suite $(\Gamma(n))_{n\geq 1}$.]
   À l'aide de la question 2, montrer que $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.
8. Représenter graphiquement la courbe de la fonction Γ.

2 Calcul de $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} \ln t e^{-t}\mathrm{d}t$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $u_n(t) = \ln t(1 - t/n)^n$ si $t < n$, $u_n(t) = 0$ si $t \geq n$.

9. Montrer que la suite (u_n) converge simplement vers la fonction $u : t \mapsto \ln t e^{-t}$.
10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t > 0$, on a $|u_n(t)| \leq |u(t)|$ et que u est intégrable.
11. Conclure que $\Gamma'(1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^n \ln t(1 - t/n)^n\mathrm{d}t$.
12. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\int_0^n \ln t(1-t/n)^n\mathrm{d}t = \dfrac{n\ln n}{n+1} + n\int_0^1 \ln u(1-u)^n\mathrm{d}u$.
    Puis, en intégrant par parties avec précautions, montrer que $\int_0^n \ln t(1-t/n)^n\mathrm{d}t = \dfrac{n\ln n}{n+1} - \dfrac{n}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^n (1-u)^k\mathrm{d}u$.
    Conclure que $\int_0^n \ln t(1-t/n)^n\mathrm{d}t = \dfrac{n}{n+1}\left(\ln n - \sum_{k=0}^n \dfrac{1}{k+1}\right)$.
13. À l'aide d'un développement asymptotique de $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{k}$, conclure que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

3 Prolongement

14. En adaptant la démarche de la partie II, montrer que pour tout $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}(1-t/n)^n\mathrm{d}t$$

15. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, $\mathrm{I}_n(x) = \int_0^n t^{x-1}(1-t)^n\mathrm{d}t$.
    Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n(x) = \dfrac{n}{x}\mathrm{I}_{n-1}(x+1)$.
    En déduire que $\mathrm{I}_n(x) = \dfrac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$.

16. Montrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} n^x \dfrac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$, puis que $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = \lim\limits_{n\to+\infty} xn^{-x}\prod_{k=1}^{n}(1+x/k)$.

17. On rappelle que $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} - \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$.

    Montrer que $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+x/k)e^{-x/k}$ (formule de Weierstrass).

18. Soit $z = x+iy \in \mathbb{C}$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 \geq -x$.

    Justifier, pour $k > n_0$, l'égalité $1 + z/k = \sqrt{(1+x/k)^2 + (y/k)^2}\,e^{i\arctan\left(\frac{y}{x+k}\right)}$.

    En déduire que, pour $n > n_0$, on a

$$\prod_{k=n_0+1}^{n}(1+z/k)e^{-z/k} = \exp\left(\sum_{k=n_0+1}^{n}\frac{1}{2}\ln\left((1+x/k)^2+(y/k)^2\right) + i\arctan\left(\frac{y}{x+k}\right) - iz/k\right)$$

19. Montrer que la série $\sum_{k>n_0}\dfrac{1}{2}\ln\left((1+x/k)^2+(y/k)^2\right) + i\arctan\left(\dfrac{y}{x+k}\right) - iz/k$ converge.

    En déduire que la suite $\left(\prod_{k=n_0+1}^{n}(1+z/k)e^{-z/k}\right)_{n>n_0}$ converge et conclure que $\left(\prod_{k=1}^{n}(1+z/k)e^{-z/k}\right)_{n\geq 1}$ converge.

    On peut donc prolonger $1/\Gamma$ à $\mathbb{C}$ tout entier en posant, pour $z\in\mathbb{C}$, $1/\Gamma(z) = ze^{\gamma z}\lim\limits_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}(1+z/k)e^{-z/k}$.

    [On montre que ce prolongement est continue sur $\mathbb{C}$, et même de classe $\mathcal{C}^\infty$.]

4 Caractérisation par la Log-convexité

20. Soit $x > 0$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left(\int_0^{+\infty}|\ln t|\,t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^{+\infty}(\ln t)^2 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

    En déduire que $(\Gamma')^2 \leq \Gamma''\Gamma$, puis que $\ln\circ\Gamma$ est convexe.

    Inversement, on considère une fonction $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}_+^*$ telle que $\ln\circ f$ est convexe $f(1)=1$, et $\forall x>0,\ f(x+1) = xf(x)$.

    On pose $g = \ln\circ f$.

21. Justifier, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, l'égalité $g(n+x) - g(x) - g(n) = \ln x + \sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\dfrac{x+i}{i}\right)$.

22. Soit k un entier tel que $k \geq x$, et $n \geq 2$.

    Justifier l'encadrement $\dfrac{g(n)-g(n-1)}{n-(n-1)} \leq \dfrac{g(n+x)-g(n)}{(n+x)-n} \leq \dfrac{g(n+k)-g(n)}{(n+k)-n}$.

    En déduire que $g(n+x) - g(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x\ln n$.

23. En déduire que $g(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x\ln n - \ln x - \sum_{i=1}^{n-1}\ln\left(\dfrac{x+i}{i}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(n^x\dfrac{(n-1)!}{x(x+1)\dots(x+n-1)}\right)$.

24. À l'aide de la question 16, conclure que $f = \Gamma$.