Devoir de vacances, de la PCSI à la PSI*

Algèbre

1. 2024 1545 IMT PSI

Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = a$ si $i = j$, $a_{i,j} = b$ si $i > j, a_{i,j} = c$ si $i < j$. Soit J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer $\det(xJ + A)$. En déduire $\det(A)$.

Éléments de correction

- Les opérations élémentaires $C_j \leftarrow C_j - C_1$ transforment $A + xJ$ en une matrice dont les colonnes 2 à n sont constantes. En développant alors par rapport à la première colonne, on obtient que $\Delta : x \mapsto \det(xJ + A)$ est polynomiale de degré au plus 1 : il existe α, β tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(xJ + A) = \alpha x + \beta$.
- Les déterminants
  $det(-bJ+A)$ et $\det(-cJ+A)$ sont triangulaires supérieur (resp. inférieur), et valent respectivement $(a-b)^n$ et $(a-c)^n$. En supposant $c \neq b$, les équations $-b\alpha + \beta = (a-b)^n$ et $-c\alpha + \beta = (a-c)^n$ donnent $\beta = \frac{1}{c-b}\left(c(a-b)^n - b(a-c)^n\right) = \det A$.
  Le cas $b = c$ s'obtient par continuité du déterminant.
  On trouve $\det A = \lim\limits_{c \to b} \frac{1}{c-b}\left(c(a-b)^n - b(a-c)^n\right) = (a-b)^{n-1}(a + (n-1)b)$.
  Ou, en sommant tous les colonnes sur la première, on obtient en factorisant $\det A = (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & \dots & \dots & b \\ \vdots & a & b & & \vdots \\ \vdots & b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b \\ 1 & b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.
  Il suffit alors de soustraire la première ligne à toutes les autres pour obtenir un déterminant triangulaire et retouver le résultat.

2. 2024 1547 Navale PSI

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = \mathrm{id}$. On suppose que $\mathrm{Im}(p)$ est stable par u. Soit $q = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u^k \circ p \circ u^{n-k}$. Montrer que q est un projecteur dont le noyau est stable par u.

Éléments de correction

- On exprime $u \circ q = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k}$. On calcule ensuite $q \circ u$ en isolant le terme d'indice zéro, en effectuant le changement d'indice $j = k-1$, et en profitant de ce que $u^n = \mathrm{id}$:

$$\begin{aligned} q \circ u &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k+1} \\ &= \frac{1}{n}\left(p \circ u^{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k+1}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(p \circ u + \sum_{j=0}^{n-2} u^{j+1} \circ p \circ u^{n-j}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(u^n \circ p \circ u^{n-(n-1)} + \sum_{j=0}^{n-2} u^{j+1} \circ p \circ u^{n-j}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^{k+1} \circ p \circ u^{n-k}. \end{aligned}$$

On obtient la même chose, donc $u \circ q = q \circ u$, ce qui assure que le noyau de q est stable par u.

- p commute avec u donc avec ses itérés. Il vient

$$q \circ p = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k} \circ p = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ p \circ u^{n-k} = q$$

puisque $p \circ p = p$.
On calcule enfin $q \circ q$ en explicitant la définition de q dans un seul des termes de cette composée : celui de droite. On profite alors de ce que q commute avec u et vérifie $q \circ p = p$

$$\begin{aligned} q \circ q &= q \circ \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} q \circ u^k \circ p \circ u^{n-k}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ q \circ p \circ u^{n-k}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k}\right) \\ &= q. \end{aligned}$$

Comme q est un endomorphisme de E et vérifie $q \circ q = q$, c'est un projecteur de E.

3. 2024 1556 CCINP PSI

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f^2 = g^2 = \mathrm{id}$ et $f \circ g + g \circ f = 0$.

(a) Montrer que g induit un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$ dans $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{id})$.

(b) Montrer que la dimension de E est paire. On pose $\dim E = 2n$.

(c) Montrer l'existence d'une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont respectivement $M_f = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

Éléments de correction

(a)
- Si $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ alors $f(x) = x$ donc $f \circ g(x) + g \circ f(x) = f \circ g(x) + g(x) = (f + \mathrm{Id})(g(x)) = 0$ donc $g(x) \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$. Donc $\tilde{g} : \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \to \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ est bien définie et la linéarité est encore vérifiée par restriction.
- Bijectivité : Soit $y \in \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ on sait que g est bijective donc il existe un unique $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Il s'agit de vérifier que $x \in \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$: $f(y) = -y$ donc $f(g(x)) = -g(x)$ donc $-g \circ f(x) = -g(x)$, et finalement $g \circ g \circ f(x) = g \circ g(x)$, soit $f(x) = x$. L'unique antécédent de y est bien dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$.

Donc g induit un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ dans $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

(b) On déduit de la question précédente que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ ont même dimension, or f est une symétrie donc $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$, donc la dimension de E est paire.

(c) On choisit une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ on pose $\varepsilon_i = g(e_i)$, alors $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ (par bijectivité de $\tilde{g}$) et comme $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$, la famille $(e_1, \ldots, e_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.
On a alors, pour tout i : $f(e_i) = e_i$ car les e_i sont dans $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $f(\varepsilon_i) = -\varepsilon_i$ car les ε_i sont dans $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$ puis $g(e_i) = \varepsilon_i$ par construction et $g(\varepsilon_i) = g^2(e_i) = e_i$.
Dans cette base on a donc $M_f = \begin{pmatrix} I_n & 0_n \\ 0_n & -I_n \end{pmatrix}$ et $M_g = \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$.

4. 2024 1563 IMT PSI

Pour tous A et B dans $\mathbb{R}_3[X]$, on pose $\langle A, B\rangle = \sum_{k=0}^{3} a_k b_k$, où les a_k et b_k sont les coefficients de A et B. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(1) = 0\}$.

(a) Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.

(b) Donner la dimension et une base de H.

(c) Donner une base orthonormée de H.

Éléments de correction

(a) C'est le produit scalaire canonique (clairement bilinéaire, symétrique, positif et défini).

(b) Comme H est le noyau de la forme linéaire non nulle $\varphi\colon P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto P(1)$, c'est un hyperplan de $\mathbb{R}_3[X]$, donc il est de dimension 3. Les polynômes $X-1$, X^2-1 et X^3-1 appartiennent manifestement à H, et forment une famille échelonnée en degré, donc constituent une base de H.

(c) On orthonormalise la base précédente via le procédé de GRam-Schmidt pour obtenir la base orthonormée suivante de H :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1), \frac{1}{\sqrt{6}}(2X^2-X-1), \frac{1}{2\sqrt{3}}(3X^3-X^2-X-1)\right)$$

- En effet $\|X-1\|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$, d'où le premier vecteur $\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)$.
- Puis $\langle X^2-1, \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, le deuxième vecteur s'obtient donc en normalisant $X^2-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1) = X^2 - X/2 - 1/2$ ou encore $2X^2-X-1$, multiple positif du précédent. Comme $\|2X^2-X-1\|^2 = 2^2+(-1)^2+(-1)^2 = 6$, on obtient le deuxième vecteur $\frac{1}{\sqrt{6}}(2X^2-X-1)$.
- Enfin $\langle X^3-1, \frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\langle X^3-1, \frac{1}{\sqrt{6}}(2X^2-X-1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}$, le troisième vecteur s'obtient donc en normalisant $X^3-1-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(X-1)-\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(2X^2-X-1) = X^3-X^2/3-X/3-1/3$ ou encore $3X^3-X^2-X-1$, multiple positif du précédent. Comme $\|3X^3-X^2-X-1\|^2 = 3^2+(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2 = 12$, on obtient le troisième vecteur $\frac{1}{2\sqrt{3}}(3X^3-X^2-X-1)$.

5. 2024 1565 CCINP PSI

Soient E un espace euclidien et p un projecteur de E.

(a) Soient $(y,z) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Développer $\|y+\lambda z\|^2$.

(b) Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

Éléments de correction

(a) $\|y+\lambda z\|^2 = \|y\|^2 + 2\lambda\langle y,z\rangle + \lambda^2\|z\|^2$.

(b) Supposons p orthogonal. Pour tout $x \in E$, on a $x = x - p(x) + p(x)$ avec $x - p(x) \in \operatorname{Ker} p$ et $p(x) \in \operatorname{Im} p$ donc $x - p(x) \perp p(x)$.
Le théorème de Pythagore donne $\|x\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 \geq \|p(x)\|^2$ donc $\|p(x)\| \leq \|x\|$.
Réciproquement, supposons $\forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
Soient $y \in \operatorname{Ker} p$ et $z \in \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.
$\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|p(y+\lambda z)\|^2 = \lambda^2\|z\|^2 \leq \|y+\lambda z\|^2 = \|y\|^2 + \lambda^2\|z\|^2 + 2\lambda\langle y,z\rangle$
d'où $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\|y\|^2 + 2\lambda\langle y,z\rangle \geq 0$ ce qui implique que $\langle y,z\rangle = 0$ (une fonction affine de signe constant est constante).
Donc p est orthogonal.

6. 2024 1566 CCINP PSI

Soient $(E, \langle,\rangle)$ un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| \leqslant \|x\|$.

(a) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \operatorname{Im}(f - \mathrm{id})$. Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $x = f(y) - y$.

(b) Exprimer $f^n(y)$ en fonction de x, y et n.

(c) Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \oplus \operatorname{Im}(f - \mathrm{id})$

Éléments de correction

(a) $x \in \operatorname{Im}(f - \mathrm{id})$ d'où l'existence de y.

(b) $f(y) = x + y$ et $f(x) = x$. On en déduit par une récurrence sans piège que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n(y) = nx + y$.

(c) Soit $x \in \operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \operatorname{Im}(f - \mathrm{id})$ et y tel que $x = f(y) - y$.
D'après ce qui précède, $x = \frac{1}{n}(f^n(y) - y)$ donc par inégalité triangulaire $\|x\| \leq \frac{1}{n}(\|f^n(y)\| + \|y\|) \leq \frac{2\|y\|}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
donc $\|x\| = 0$ et donc $x = 0_E$.
Ceci prouve que $\operatorname{Ker}(f - \mathrm{id}) \cap \operatorname{Im}(f - \mathrm{id}) = \{0_E\}$.
Le théorème du rang permet de conclure.

7. 2024 1282 Centrale PSI

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & c & b \\ -c & 0 & a \\ -b & -a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Trouver α pour que $A^3 = \alpha A$. Calculer A^n en fonction de α.

Éléments de correction

$A^2 = \begin{pmatrix} -b^2-c^2 & -ab & ac \\ -ab & -a^2-c^2 & -bc \\ ac & -bc & -a^2-b^2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -a^2c-b^2c-c^3 & -a^2b-b^3-bc^2 \\ a^2c+b^2c+c^3 & 0 & -a^3-ab^2-ac^2 \\ a^2b+b^3+bc^2 & a^3+ab^2+ac^2 & 0 \end{pmatrix} = \alpha A$ où $\alpha = -(a^2+b^2+c^2)$.

On en déduit par récurrence immédiate que $\forall n \in \mathbb{N},\ A^{2n+1} = \alpha^n A$ puis $A^{2n+2} = \alpha^n A^2$.

8. 2024 1283 Centrale PSI

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq b$ tels que : $(f - a\ \mathrm{id}\ ) \circ (f - b\ \mathrm{id}\ ) = 0$.

(a) Déterminer $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda(f - a\,\mathrm{id})$ et $\mu(f - b\,\mathrm{id})$ soient des projecteurs.

(b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}) = \mathrm{Im}(f - b\,\mathrm{id})$.

(c) Déterminer f^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Éléments de correction

(a) On a $f^2 = (a+b)f - ab\,\mathrm{id}_E$.
$(\lambda(f - a\,\mathrm{id}_E))^2 = \lambda^2\left(f^2 - 2af + a^2\,\mathrm{id}_E\right) = \lambda^2(b-a)(f - a\,\mathrm{id}_E)$. Donc $(\lambda(f - a\,\mathrm{id}_E))^2 = \lambda(f - a\,\mathrm{id}_E)$ si et seulement si $\lambda = \frac{1}{b-a}$.
De même, $\mu = \frac{1}{a-b}$.
On note p_a et p_b ces projecteurs.

(b) $p_a \circ p_b = 0$ donc $\mathrm{Im}\, p_b \subset \mathrm{Ker}\, p_a$.
Pour l'inclusion réciproque, soit $x \in \mathrm{Ker}\, p_a$. Par définition, $f(x) = ax$ donc $p_b(x) = \frac{1}{a-b}(ax - bx) = x$ donc $x \in \mathrm{Im}\, p_b$.

(c) On déduit de ce qui précède que $E = \mathrm{Im}\, p_b \oplus \mathrm{Ker}\, p_b = \mathrm{Im}\, p_b \oplus \mathrm{Im}\, p_a$.
Plus précisément, on peut également remarquer que $p_a + p_b = \mathrm{id}_E$ avec $p_a \circ p_b = p_b \circ p_a = 0$ et $f = bp_a + ap_b$ donc, avec la formule du binôme, $f^n = b^n p_a + a^n p_b$.

9. 2024 1284 Centrale PSI

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

(a) On suppose A inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

(b) On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$. Montrer que A est inversible, et que A^{-1} est à coefficients entiers.

Éléments de correction

(a) On sait que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
On voit donc que si $\det A = ad - bc \in \{-1, 1\}$ alors $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \pm\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.
Réciproquement supposons que $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Alors $\det A^{-1} \in \mathbb{Z}$ et la relation $\det A \times \det A^{-1} = 1$ implique $\det A = \pm 1$ car 1 n'a pas d'autre diviseur que 1 et -1.

(b) Si $A^p = I_n$, alors A est inversible et $A^{-1} = A^{p-1}$ qui est à coefficients entiers car A l'est.

10. 2024 1288 Centrale PSI

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P, Q \in E$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$.

(a) Montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire et que $\left((X-1)^n\right)_{n\geqslant 0}$ est une base orthogonale de E.

(b) Déterminer l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[X]$.

Éléments de correction

(a) La symétrie et la bilinéarité sont immédiates.

Positivité : pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\langle P, P\rangle = \sum_{k=0}^{\deg P} (P^{(k)}(1))^2 \geq 0$ comme somme de termes positifs.

Séparation : $\langle P, P\rangle = 0 \iff \forall k \in [\![0 ; \deg P]\!]$, $(P^{(k)}(1))^2 = 0$ (une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls) ce qui fait que 1 est racine d'ordre au moins $\deg P + 1$ de P ce qui fait $\deg P + 1$ racines, et donc P est nul.

$\langle \ , \ \rangle$ est donc bien un produit scalaire.

1 est racine d'ordre n de $(X-1)^n$ donc $\left((X-1)^n\right)^{(k)}(1) = 0$ sauf si $k = n$. On en déduit que si $n \neq p$, $\langle (X-1)^n | (X-1)^p\rangle = 0$ et la famille $((X-1)^n)_{n\geqslant 0}$ est bien orthogonale. C'est une base de E car elle est étagée en degrés? C'est donc bien une base orthogonale de E.

(b) $\mathbb{R}_n[X] = \mathrm{Vect}\left((X-1)^p\right)_{0\leq p\leq n}$ donc, avec ce qui précède que $(\mathbb{R}_n[X])^\perp = \mathrm{Vect}\left((X-1)^p\right)_{p\geq n+1}$.

11. 2024 923 Mines PSI

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $\forall k \in \mathbb{Z}, P(k)$ est premier. Montrer que P est constant.

Éléments de correction

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Par l'absurde, supposons P non constant. P s'écrit alors $P = a_0 + \sum_{k=1}^d a_k X^k$ avec $d \geq 1$, $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$ et $a_d \neq 0$.

$a_0 = P(0) \in \mathcal{P}$, notons p ce nombre premier. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $P(np) = p + \sum_{k=1}^d a_k n^k p^k$.

Or $\sum_{k=1}^d a_k n^k p^k \underset{n\to+\infty}{\sim} a_d n^d p^d$, en particulier $\sum_{k=1}^d a_k n^k p^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$.

On peut donc trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=1}^d a_k n^k p^k \neq 0$, ou encore $\sum_{k=1}^d a_k n^k p^{k-1} \neq 0$.

Pour un tel n, on a alors $P(np) = p\left(1 + \sum_{k=1}^d a_k n^k p^{k-1}\right)$ multiple strict de p donc non premier.

12. 2024 924 Mines PSI

Montrer qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0$$

Éléments de correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque d'abord que, à $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ fixé, l'identité à prouver est linéaire en P. Ainsi, il suffit de prouver l'existence d'un n-uplet $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ qui convienne pour tous les éléments d'une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Prenons la base canonique $(1, X, \ldots, X^{n-1})$. On se rend alors compte de deux choses :

– si l'on trouve $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ tel que $(X+n)^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X+k)^{n-1} = 0$, alors les dérivations successives de cette égalité prouvent que le même n-uplet est valable pour tous les éléments de la base canonique.

– il suffit donc de prouver l'existence d'un n-uplet convenable pour $P = X^{n-1}$. Or pour cela, il suffit de prouver que la famille $(X^{n-1}, (X+1)^{n-1}, \ldots, (X+n-1)^{n-1})$ est libre dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, car c'en est alors une base (par cardinalité) : ceci garantira donc bien que $(X+n)^{n-1}$ s'exprime comme combinaison linéaire des $(X+j)^{n-1}$ pour $0 \leq j \leq n-1$.

Soit donc $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1})$ tel que $\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_k (X+j)^{n-1} = 0$. En dérivant successivement, on a alors, que, pour tout $i \in [\![0 ; n-1]\!]$:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_k (X+j)^i = 0.$$

On évalue toutes ces égalités en 1, et on constate alors que la colonne $(\lambda_0 \ \ldots \ \lambda_{n-1})^\top$ est dans le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & n \\ 1^2 & 2^2 & \ldots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{n-1} & 2^{n-1} & \ldots & n^{n-1} \end{pmatrix}$, qui est inversible (Vandermonde). On obtient la liberté voulue, et donc la réponse à la question.

13. 2024 925 Mines PSI

Soit (P) le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 2z - y = 0$ et u le vecteur $(1, 2, 1)^T$.

(a) Calculer la matrice de projection vectorielle sur (P) parallèlement à u.

(b) Calculer l'image par cette projection de la droite $(D) : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$

Éléments de correction

(a) On décompose $X = v + w$ avec $v \in (P)$ et $w \in \mathrm{Vect}(u) : w = \lambda u$. Alors $v = X - \lambda u$ vérifie l'équation de (P) ce qui fournit $\lambda = \frac{1}{3}(-x + y + 2z)$.

Donc $v = p(X) = X - \lambda u = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4x - y - 2z \\ 2x + y - 4z \\ x - y + z \end{pmatrix}$.

La matrice de p est donc $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) D est dirigée par $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $p(D)$ est dirigée par $p(v) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

C'est la droite d'équations $x = y$ et $z = 0$.

14. 2024 926 Mines PSI

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On considère les polynômes $E_k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} X^k(1 - X)^{n-k}, 0 \leqslant k \leqslant n$.

(a) Montrer que $(E_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E.

(b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} kE_k$ et $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 E_k$.

(c) Généraliser.

Éléments de correction

(a) Les polynômes P_k sont tous de degré n et à coefficients réels, donc appartiennent à $\mathbb{R}_n[X]$. Leur matrice dans la base canonique est échelonnée, donc ils forment une famille libre. Enfin ils sont au nombre de $n + 1$, à savoir la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, donc en forment une base.

(b) Par la formule du binôme, on a $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} X^i (1 - X)^{n-i} = 1 = \sum_{k=0}^{n} P_k$.

- On a $k\binom{n}{k} = 0$ si $k = 0$ et $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ si $k \geqslant 1$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} kP_k = n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^k (1 - X)^{n-k} \overset{(i=k-1)}{=} nX \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} X^i (1 - X)^{n-1-i} = nX.$$

- On a $k(k-1)\binom{n}{k} = 0$ si $k \leqslant 1$ et $k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$ si $k \geqslant 2$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P_k &= n(n-1) \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} X^k (1 - X)^{n-k} \overset{(i=k-2)}{=} n(n-1)X^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} X^i (1 - X)^{n-2-i} \\ &= n(n-1)X^2. \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\sum_{k=0}^{n} k^2 P_k = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)P_k + \sum_{k=0}^{n} kP_k = n(n-1)X^2 + nX$.

(c) On a $\frac{k!}{(k-j)!}\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-j)!}\binom{n-j}{k-j}$, donc

$$\sum_{k=j}^{n} \frac{k!}{(k-j)!} P_k = \frac{n!}{(n-j)!} \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{k-j} X^k (1 - X)^{n-k} \overset{(i=k-j)}{=} \frac{n!}{(n-j)!} X^j \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} X^i (1 - X)^{n-j-i} = \frac{n!}{(n-j)!} X^j.$$

Ainsi $X^j = \frac{(n-j)!}{n!} \sum_{k=j}^{n} \frac{k!}{(k-j)!} P_k = \sum_{k=j}^{n} \frac{\binom{k}{j}}{\binom{n}{j}} P_k$.

15. 2024 928 Mines PSI

Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline A & B \end{array}\right)$ avec $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que M soit inversible. Calculer alors M^{-1}.

Éléments de correction

La matrice M est équivalente par lignes à $M' = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & B-A \end{pmatrix}$ et donc $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} M' = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(A-B)$.

Il s'ensuit que M est inversible si et seulement si $\operatorname{rg} M = 2n$ soit $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(A-B) = 2n$, soit $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A-B) = n$ (car $\operatorname{rg} A \leq n$ et $\operatorname{rg}(A-B) \leq n$).

Ainsi M est inversible si et seulement si A et $B-A$ sont inversibles.

Supposons donc A et $B-A$ inversibles. En cherchant M^{-1} décomposée en blocs $M^{-1} = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, on trouve aisément que

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -A^{-1}B(A-B)^{-1} & (A-B)^{-1} \\ (A-B)^{-1} & -(A-B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

16. 2024 930 Mines PSI

Soient E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie, $u \in L(E)$ nilpotent, F est sous-espace vectoriel de E tel que $u(F) \subset F$. On suppose que $E = F + \operatorname{Im}(u)$. Montrer que $E = F$.

Éléments de correction

Soit $x \in E$. Il existe par hypothèse un $f_1 \in F$ et un $x_1 \in E$ tels que $x = f_1 + u(x_1)$. Supposons alors qu'il existe un $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x = f_k + u^k(x_k)$ avec $f_k \in F$ et $x_k \in E$. Par hypothèse initiale il existe $f'_k \in F$ et $x_{k+1} \in E$ tels que $x_k = f'_k + u(x_{k+1})$, ce qui donne $x = f_k + u^k(f'_k) + u^{k+1}(x_{k+1}) = f_{k+1} + u^{k+1}(x_{k+1})$ avec $f_{k+1} := f_k + u^k(f'_k) \in F$ par stabilité d'icelui par u. On a ainsi prouvé par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_k \in F$ et $x_k \in E$ tels que $x = f_k + u^k(x_k)$. Puisqu'il existe p tel que $u^p = 0$, on en déduit que $x = f_p \in F$. Remarquons que la finitude de la dimension n'intervient pas.

17. 2024 942 Mines PSI

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On pose, pour $i \in [\![0\,;3]\!]$: $L_i = \displaystyle\prod_{k \in [\![0\,;3]\!] \setminus \{i\}} \frac{X-k}{i-k}$.

(a) Calculer $L_i(j)$ pour $j \in [\![0\,;3]\!]$. Montrer que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base de E.

(b) Soit $\phi : (P,Q) \in E^2 \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{3} (P(k)+P(k+1))\,(Q(k)+Q(k+1))$. Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

(c) Trouver une base orthonormale pour ce produit scalaire.

Éléments de correction

(a) Ce sont les polynômes de Lagrange. $L_i(j) = \delta_{ij}$. Si $\sum\limits_{k=0}^{3} \lambda_i L_i = 0$, alors en évaluant en i on obtient $\lambda_i = 0$ donc la famille est libre et son cardinal vaut la dimension donc c'est une base.
On peut ajouter que les coordonnées d'un polynôme P dans cette base sont $P(k)_{0 \leq k \leq 3}$.

(b) Bilinéarité, symétrie et positivité sont triviales.
Définition : soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $\varphi(P,P) = 0 = \sum_{k=0}^{3}(P(k)+P(k+1))^2 = 0$ donc $\forall k \in [\![0\,;3]\!]$, $P(k)+P(k+1) = 0$. Le polynôme $P(X)+P(X+1)$ est de degré au plus 3 et admet 4 racines donc il est nul. Or $\deg(P) = \deg(P(X) + P(X+1))$ donc $P = 0$.

(c) On commence par calculer $\varphi(L_i, L_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } |i-j| \geq 2 \\ 1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 2 & \text{si } i = j \geq 1 \\ 1 & \text{si } i = j = 0 \end{cases}$.
On orthonormalise cette base pour obtenir la BON $(L_0, L_1 - L_0, L_2 - L_1 + L_0, L_3 - L_2 + L_1 - L_0)$.

18. 2024 404 X PSI

Pour $n \geq 2$, on pose $P_n = (X+1)^n + X^n + 1$ et $Q = (X^2+X+1)^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur n pour que Q divise P_n.

Éléments de correction

Soit donc $n \geq 2$. $Q = (X-j)^2(X-j^2)^2$ divise P_n si et seulement si j et $j^2 = \overline{j}$ sont racines doubles de P_n. Comme P_n est à coefficient réels, j est racine si et seulement si j^2 l'est, et les multiplicités sont les mêmes.

Ainsi Q divise P_n si et seulement si j est racine double de P_n, soit $P_n(j) = 0 = P'_n(j)$.

Or $P_n(j) = (j+1)^n + j^n + 1 = (-j^2)^n + j^n + 1 = (-1)^n j^{2n} + j^n + 1$.

- Si n est pair, alors $P_n(j) = j^{2n} + j^n + 1$ vaut 3 si n est multiple de 3, et 0 sinon. En effet si $n \equiv 1\,[3]$ alors $j^n = j$ et $j^{2n} = j^2$ donc $j^{2n} + j^n + 1 = j^2 + j + 1 = 0$, et si $n \equiv 2\,[3]$ alors $j^n = j^2$ et $j^{2n} = j$ donc $j^{2n} + j^n + 1 = j + j^2 + 1 = 0$, enfin si $n \equiv 0\,[3]$ alors $j^n = 1 = j^{2n}$ donc $j^{2n} + j^n + 1 = 3$.
- Si n est impair, alors $P_n(j) = -j^{2n} + j^n + 1$ vaut $-j^2 + j + 1 = 2j + 2 \neq 0$ si $n \equiv 1\,[3]$, $-j + j^2 + 1 = 2j^2 + 2 \neq 0$ si $n \equiv 2\,[3]$, et $-1 + 1 + 1 = 1 \neq 0$ si $n \equiv 0\,[3]$.

Finalement, $P_n(j) = 0$ si et seulement si n est pair et non multiple de 3, soit $n \equiv 2$ ou $4\,[6]$.

Si tel est le cas, $P_n'(j) = n(j+1)^{n-1} + nj^{n-1} = n\left((-j^2)^{n-1} + j^{n-1}\right) = n\left(-j^{2n-2} + j^{n-1}\right)$ puisque n est pair donc $n-1$ impair. Et donc $P_n'(j) = 0$ si et seulement si $j^{2n-2} = j^{n-1}$ soit $j^{n-1} = 1$ soit $n-1$ multiple de 3, autrement dit $n \equiv 1\,[3]$.

Ainsi $P_n(j) = 0 = P_n'(j)$ si et seulement si $n \equiv 4\,[6]$.

19. 2024 405 X PSI

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe une base de $\mathcal{L}(E)$ formée de projecteurs.

Éléments de correction

Soit $d = \dim(E)$. Via le choix d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d)$ de E, on obtient une base naturelle $(f_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ de $\mathcal{L}(E)$, où $f_{i,j}$ est définie par $f_{i,j}(e_k) = \delta_{i,k}e_j$. ($f_{i,j}$ est l'endomorphisme défini par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_{i,j}) = E_{i,j}$).

Il suffit d'écrire les $f_{i,j}$ comme des combinaisons linéaires de projecteurs, en effet on obtient alors une famille génératrice (finie) formée de projecteurs, dont on peut alors extraire une base via le théorème de la base incomplète.

- Si $i = j$, alors $f_{i,j} = f_{i,i}$ est un projecteur (sur $\mathrm{Vect}(e_i)$, selon $\mathrm{Vect}(e_k)_{k\neq i}$), il n'y a rien à prouver.
- Si $i \neq j$, soit $p_{i,j}$ le projecteur sur $\mathrm{Vect}(e_j)$ selon $\mathrm{Vect}(e_i - e_j) \oplus \mathrm{Vect}(e_k)_{k\neq i,j}$.
  On a $p_{i,j}(e_j) = e_j$ car $e_j \in \mathrm{Im}\, p_{i,j}$, et $p_{i,j}(e_i - e_j) = 0$ donc $p_{i,j}(e_i) = p_{i,j}(e_j) = e_j$, enfin $p_{i,j}(e_k) = 0$ pour $k \neq i,j$.
  Et donc $(p_{i,j} - f_{j,j})(e_i) = e_j - 0 = e_j$, $(p_{i,j} - f_{j,j})(e_j) = e_j - e_j = 0$ et $(p_{i,j} - f_{j,j})(e_k) = 0 - 0 = 0$ pour $k \neq i,j$.
  Autrement dit $p_{i,j} - f_{j,j}$ coïncide avec $f_{i,j}$ sur la base $\mathcal{B}$ donc $f_{i,j} = p_{i,j} - f_{j,j}$ est une différence de projecteurs.
  (Matriciellement, $E_{i,j} = (E_{i,j} + E_{j,j}) - E_{j,j}$, avec $E_{i,j} + E_{j,j}$ et $E_{j,j}$ deux matrices de projecteurs).

Ainsi $(f_{i,i})_{1\leq i\leq d} \cup (p_{i,j})_{1\leq i\neq j\leq d}$ est une famille génératrice de cardinal d^2 de $\mathcal{L}(E)$, donc une base, constituée de projecteurs.

Analyse

20. 2024 1649 CCINP PC

Soient $n \geq 2$ et $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto x^n + x^{n-1} + x - 1$.

(a) Soit $X > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_4^X \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ est définie et la calculer.

(b) Soient (a_n) et (b_n) deux suites strictement positives, équivalentes en l'infini, et de limite nulle ou infinie. Montrer que $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$.

(c) Montrer qu'il existe un unique réel $u_n > 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$. Montrer que $u_n \in]0,1]$.

(d) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^{n-1}(1 - u_{n+1}^2)$. En déduire que la suite (u_n) est monotone. Donner sa monotonie.

(e) Prouver l'existence et calculer la limite de (u_n).

Éléments de correction

(a) La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t} = u(t)u'(t)$ avec $u = \ln$ est continue sur le segment $[4, X]$, donc son intégrale existe et vaut

$$\int_4^X \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}u^2(t)\right]_4^X = \frac{1}{2}((\ln X)^2 - (\ln 4)^2) = \frac{1}{2}\ln(4X)\ln\left(\frac{X}{4}\right)\cdot$$

(b) On écrit que $b_n = a_n + \mathrm{o}(a_n) = a_n(1 + \mathrm{o}(1))$ quand $n \to +\infty$. Alors

$$\ln(b_n) = \ln(a_n) + \ln(1 + \mathrm{o}(1)) = \ln(a_n) + \mathrm{o}(1).$$

Comme les suites (a_n) et (b_n) ont pour limite zéro ou l'infini, $|\ln a_n|$ et $|\ln b_n|$ ont pour limite $+\infty$, donc le reste $\mathrm{o}(1)$ dans l'égalité ci-dessus est *a fortiori* négligeable devant $\ln(a_n)$, donc

$$\ln(a_n) \sim \ln(b_n).$$

(c) La fonction polynomiale f_n est dérivable de dérivée donnée par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + 1$, qui est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$. Alors f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, comme $f_n(0) = -1$, et qu'elle est continue, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$. Il existe donc un unique réel $u_n > 0$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

De plus, comme $f_n(1) = 2 > 0$, on a

$$u_n \in]0, 1].$$

(d) Par définition, $u_{n+1}^{n+1} + u_{n+1}^n + u_{n+1} - 1 = 0$ donc $u_{n+1} - 1 = -u_{n+1}^{n-1}(u_{n+1}^2 + u_{n+1})$. Alors

$$\begin{aligned} f_n(u_{n+1}) &= u_{n+1}^n + u_{n+1}^{n-1} + u_{n+1} - 1 \\ &= u_{n+1}^n + u_{n+1}^{n-1} - u_{n+1}^{n-1}(u_{n+1}^2 + u_{n+1}) \\ &= u_{n+1}^{n-1}[u_{n+1} + 1 - u_{n+1}^2 - u_{n+1}] \\ &= u_{n+1}^{n-1}(1 - u_{n+1}^2). \end{aligned}$$

Comme $u_{n+1} \in]0, 1[$, le calcul ci-dessus montre que $f_n(u_{n+1}) > 0$. La croissance de f_n et la définition de u_n montrent alors que $u_n < u_{n+1}$, donc que (u_n) est (strictement) croissante.

(e) Comme (u_n) est croissante et majorée, elle possède une limite finie notée ℓ, et comme $u_n \in]0, 1[$ pour tout $n \geqslant 2$, on a $\ell \in]0, 1]$. Si ℓ était strictement plus petite que 1, compte-tenu de l'inégalité $\forall n \geqslant 2, 0 \leqslant u_n \leqslant \ell$, on aurait $\forall n \geqslant 2, 0 \leqslant u_n^n \leqslant \ell^n$, donc $\lim u_n^n = \lim u_n^{n-1} = 0$. En passant à la limite dans la définition $f_n(u_n) = 0$, on obtiendrait alors $0 + 0 + \ell - 1 = 0$: contradiction. On conclut que

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

21. 2024 1650 CCINP PC

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n =] - \frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$. On pose $f\colon x \mapsto \tan x - x$, définie sur $\cup_{n\in\mathbb{Z}} I_n$.

(a) Rappeler le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.

(b) i. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $f(x_n) = 0$.
  ii. Montrer que $x_n \sim n\pi$.

(c) On pose $y_n = x_n - n\pi$.
  i. Montrer que $y_n = \arctan x_n$ et que $\lim y_n = \frac{\pi}{2}$.
  ii. Montrer que $\tan(y_n - \frac{\pi}{2}) \sim y_n - \frac{\pi}{2}$ et déterminer $c \in \mathbb{R}$ tel que $y_n - \frac{\pi}{2} \sim \frac{c}{n}$.

(d) Montrer que $\tan(y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}) = \frac{x_n \tan(1/n\pi) - 1}{x_n + \tan(1/n\pi)}$.

(e) Trouver $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $x_n = an + b + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

Éléments de correction

(a) Le cours dit que $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ en zéro.

(b) i. La fonction f est définie continue sur I_n et tend vers $-\infty$ (resp. en $+\infty$) en $n\pi - \frac{\pi}{2}$ (resp. en $n\pi + \frac{\pi}{2}$). Elle réalise donc une bijection de I_n sur $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un unique $x_n \in I_n$ tel que $f(x_n) = 0$.
  ii. L'encadrement $n\pi - \frac{\pi}{2} < x_n < n\pi + \frac{\pi}{2}$ prouve que $x_n \sim n\pi$.

(c) i. Par construction, $y_n \in I_0 =] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc

$$\begin{aligned} y_n &= \arctan(\tan y_n) \quad \text{car la fonction arctangente est la réciproque de la restriction de la tangente à } I_0 \\ &= \arctan(\tan(x_n - n\pi)) \quad \text{par définition de } y_n \\ &= \arctan(\tan x_n) \quad \text{par } \pi\text{–périodicité de la tangente} \\ &= \arctan(x_n) \quad \text{car } f(x_n) = 0, \text{ c'est-à-dire } \tan x_n = x_n. \end{aligned}$$

Comme $\lim x_n = +\infty$, on en déduit que $\lim y_n = \frac{\pi}{2}$.

  ii. Comme $\tan u \sim u$ quand $u \to 0$, et comme $\lim(y_n - \frac{\pi}{2}) = 0$, on a bien

$$\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} y_n - \frac{\pi}{2}.$$

Comme $\tan(u - \frac{\pi}{2}) = \frac{\sin(u - \frac{\pi}{2})}{\cos(u - \frac{\pi}{2})} = \frac{-\cos u}{\sin u} = -\frac{1}{\tan u}$ pour tout réel u pour lequel cette relation a un sens, on a

$$\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) = \tan\left(\arctan x_n - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan(\arctan x_n)} = -\frac{1}{x_n} \sim -\frac{1}{n\pi}.$$

L'équivalent précédent montre alors que

$$y_n - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi},$$

c'est-à-dire que $c = -\frac{1}{\pi}$.

(d) Il suffit d'appliquer la formule d'addition $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-(\tan a)(\tan b)}$ avec $a = y_n - \frac{\pi}{2}$, donc $\tan a = -\frac{1}{x_n}$ et $b = \frac{1}{n\pi}$. On obtient

$$\tan\left(y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{-\frac{1}{x_n} + \tan(\frac{1}{n\pi})}{1 + \frac{1}{x_n}\tan(\frac{1}{n\pi})} = \frac{x_n \tan(\frac{1}{n\pi}) - 1}{x_n + \tan(\frac{1}{n\pi})}$$

(e) Comme $x_n = n\pi + y_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})$, on peut calculer un développement limité du quotient de la question précédente :

$$\frac{x_n \tan(\frac{1}{n\pi}) - 1}{x_n + \tan(\frac{1}{n\pi})} = \frac{(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}(\frac{1}{n}))(\frac{1}{n\pi} + \frac{1}{3n^3\pi^3} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^3})) - 1}{n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \mathrm{o}(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n\pi}} = \frac{1 + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}(\frac{1}{n}) - 1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + \mathrm{o}(\frac{1}{n})} = \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, en appliquant la fonction arctangente aux résultats des deux questions précédentes, on obtient $y_n - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} = \tan(\frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})) = \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}(\frac{1}{n^2})$. Enfin, l'égalité de définition $x_n = n\pi + y_n$ conduit à

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

22. 2024 1656 IMT PC

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$.

(a) Trouver α tel que u_n possède le développement suivant quand $n \to +\infty$:

$$u_n = (1+a+b)\sqrt{n} + \frac{\alpha}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

(b) Trouver les couples (a,b) tels que la série $\sum u_n$ converge.

Éléments de correction

(a) Un développement limité du terme général fournit

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{n}\left[1 + a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2} + b\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\right] \\ &= \sqrt{n}\left[1 + a\left(1 + \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) + b\left(1 + \frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right], \\ &= (1+a+b)\sqrt{n} + \frac{a/2+b}{\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right). \end{aligned}$$

On conclut que $\alpha = \frac{a}{2} + b$.

(b) Pour que la série $\sum u_n$ converge, il faut que la suite (u_n) converge, ce qui nécessite $1+a+b=0$. On suppose cette condition réalisée. Si $\frac{a}{2} + b \neq 0$, alors $u_n \sim \frac{\alpha}{\sqrt{n}}$ avec $\alpha \neq 0$, donc la série diverge. Il faut donc aussi que $\frac{a}{2} + b = 0$. Réciproquement, si les deux conditions ci-dessus sont réalisées, alors $u_n = \mathrm{O}(\frac{1}{n^{3/2}})$, donc $\sum u_n$ converge (absolument).

En résumé, la série proposée converge si et seulement si $a = -2b$ et $b = 1$, c'est-à-dire si et seulement si u_n est de la forme

$$u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}.$$

Remarque. — Dans ce cas, la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est télescopique et vaut $\sum_{k=0}^n \sqrt{k} - 2\sum_{k=0}^n \sqrt{k+1} + \sum_{k=0}^n \sqrt{k+2} = \sum_{k=0}^n \sqrt{k} - 2\sum_{k=1}^{n+1}\sqrt{k} + \sum_{k=2}^{n+2}\sqrt{k+2} = 1 - 2 - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} = -1 + \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$. On en déduit que $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n = -1$.

23. 2024 1575 IMT PSI

(a) Étudier la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

(b) Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge.

(c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$. Étudier la convergence de (v_n).

(d) On admet le théorème de Cesàro. Déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Éléments de correction

(a)
- La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est telle que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$ (il y a en fait égalité), donc la suite (u_n) est bien définie et strictement positive. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) < x$ (en étudiant la fonction $x \mapsto f(x) - x$), on a $u_{n+1} = f(u_n) < u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc converge vers un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Comme f est continue, α est un point fixe de f, et le seul point fixe de f est 0 (toujours via l'étude de la fonction $x \mapsto f(x) - x$), donc $\alpha = 0$.

(b) De $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$ et du fait que u_n converge vers 0, on tire $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2}u_n^2 + \mathrm{o}(u_n^2)$ donc $u_n^2 = 2(u_n - u_{n+1}) + \mathrm{o}(u_n^2)$ et donc $u_n^2 \sim 2(u_n - u_{n+1}) \geq 0$ d'après (a). Or la série télescopique $\sum(u_n - u_{n+1})$ converge car la suite (u_n) converge donc $\sum u_n^2$ converge.

(c) Comme $u_n \to 0$, on a $u_{n+1} = \ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + \mathrm{o}(u_n^2) = u_n(1 - \frac{u_n}{2} + \mathrm{o}(u_n))$, d'où

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n(1 - u_n/2 + \mathrm{o}(u_n))} = \frac{1}{u_n}\left(1 + \frac{u_n}{2} + \mathrm{o}(u_n)\right),$$

donc $v_n := \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{1}{2} + \mathrm{o}(1)$, i.e. $v_n \to \frac{1}{2}$.

(d) Le théorème de Césaro permet d'obtenir $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}) = \frac{1}{n}(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0}) \to \frac{1}{2}$, donc finalement $\frac{1}{nu_n} \to \frac{1}{2}$, i.e.

$$u_n \sim \frac{2}{n}.$$

Cet équivalent montre que la série $\sum u_n$ diverge.

24. 2024 1576 CCINP PSI

Soit $f : x \mapsto \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Éléments de correction

Remarquons d'abord que, la fonction partie entière étant continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, f est continue sur cet ensemble par opérations usuelles sur des fonctions continues. Il reste à étudier la continuité en un point $n \in \mathbb{Z}$ quelconque. Or, ayant $\lfloor n^- \rfloor = n-1$ et $\lfloor n \rfloor = \lfloor n^+ \rfloor = n$, on en déduit, par opérations usuelles sur les limites :

$$f(n^-) = (n-1) + (n-(n-1))^2 = n; \quad f(n) = f(n^+) = n + (n-n)^2 = n,$$

ce qui assure la continuité de f en n. Au final, f est continue sur $\mathbb{R}$.

25. 2024 1577 Navale PSI

Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$. Préciser le domaine de définition et de continuité de f. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et 1.

Éléments de correction

La fonction $g\colon t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{\ln t}$ est continue sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$. Comme x et x^2 sont simultanément du même côté de 1 lorsque $x > 0$, on en déduit que f est bien définie sur $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$.

D'après le théorème fondamental de l'analyse, f est continue (et même dérivable) sur D_f.

g est prolongeable par continuité en zéro par la valeur $g(0) = 0$. On note encore g ce prolongement. Alors g est bornée sur le segment $[0,1/2]$ donc, si $0 < x \leq 1/2$, on a

$$|f(x)| \leqslant \int_{x^2}^{x} |g(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \|g\|_\infty^{[0,1/2]} \int_{x^2}^{x} \mathrm{d}t = x(1-x)\|g\|_\infty^{[0,1/2]}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, donc que f est prolongeable par continuité en zéro par la valeur $f(0) = 0$.

Soit $x \in \left]1\,;2\right[$. Pour tout $t \in \left[x\,;x^2\right]$, on a $\frac{x}{t\ln t} \leq \frac{t}{t\ln t} = \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t\ln t}$. En intégrant cet encadrement, on obtient $x\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq f(x) \leq x^2 \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ soit $x\ln 2 \leq f(x) \leq x^2 \ln 2$. Avec le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2$.

De même pour $x \in \left]0\,;1\right[$ et $t \in \left[x^2\,;x\right]$, on a $\ln t < 0$ donc $\frac{x^2}{t\ln t} \geq \frac{t}{t\ln t} = \frac{1}{\ln t} \geq \frac{x}{t\ln t}$ et en intégrant, $x^2\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \geq -f(x) \geq x\int_{x^2}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$ soit $x^2\ln(1/2) \geq -f(x) \geq x\ln(1/2)$ ou encore $x^2\ln 2 \leq f(x) \leq x\ln 2$. Avec le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ln 2$.

26. 2024 1591 IMT PSI

Soit, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

(a) Calculer I_0 et I_1. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n.

(b) Donner une expression de I_n en fonction de n en distinguant selon la parité de n.

Éléments de correction

(a) $I_o = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Une intégration par parties donne $I_{n+2} = \left[-\cos t \sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin^n t\,\mathrm{d}t = 0 + (n+1)\int_0^{\pi/2}(1-\sin^2 t)\sin^n t\,\mathrm{d}t = (n+1)(I_n - I_{n+2})$ soit $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

(b) On en déduit par récurrence que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} I_{2p} = \frac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\frac{\pi}{2} \\ I_{2p+1} = \frac{(2^p p!)^2}{(2p+1)!} \end{cases}$

27. 2024 951 Mines PSI

On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+1} + 1$.

(a) On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge. Montrer que (u_n) converge pour tout réel a et que sa limite vaut 1.

(b) Montrer que (u_n) converge pour $a = 1$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n!}$. Montrer que (S_n) converge vers 1.

Éléments de correction

(a) Supposons qu'il existe a tel que (u_n) converge. Soit (v_n) satisfaisant aussi la relation. Si on pose $w_n := v_n - u_n$, on a alors, pour tout n

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \left(\frac{v_n}{n+1} + 1\right) - \left(\frac{u_n}{n+1} + 1\right) = \frac{w_n}{n+1},$$

ce qui prouve que $w_n = \frac{w_0}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $v_n = u_n + w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lim(u_n) + 0 = \lim(u_n)$. La suite (v_n) converge, et ce vers la même limite que (u_n), que l'on note ℓ. Pour la déterminer, on passe à la limite dans la relation de récurrence : on y obtient $\ell = 0 + 1 = 1$.

(b) Pour $u_0 = 1$, on montre immédiatement que (u_n) est positive. Il suffit alors de prouver que (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang pour prouver sa convergence. Or on a :

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{u_n}{n+1} - u_n = 1 - \frac{n}{n+1} u_n.$$

Il suffit donc de prouver que $u_n \geq \frac{n+1}{n}$ à partir d'un certain rang pour conclure. Montrons-le par récurrence.
– Pour $n = 1$, on a $u_1 = \frac{1}{1} + 1 = 2 = \frac{2}{1}$;
– Soit $n \geq 1$ tel que $u_n \geq \frac{n+1}{n}$. Alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1} + 1 \geq \frac{\frac{n+1}{n}}{n+1} + 1 = \frac{1}{n} + 1 \geq \frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n+2}{n+1}$, cqfd.

(c) Suffirait-il de voir que cette suite satisfait la relation de récurrence précédente ? Testons :

$$\frac{S_n}{n+1} + 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{(n+1)!} + \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k!}{(n+1)!} = S_{n+1},$$

c'est bien le cas. La conclusion s'ensuit.

28. 2024 953 Mines PSI

(a) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geq 2} \dfrac{1}{k^2-1}$ converge et calculer sa somme.

(b) Montrer que la série $\sum\limits_{k\geq 2} \dfrac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k}$ converge et calculer sa somme.

Éléments de correction

(a) Pour tout $n \geq 2$, on a, après décomposition en éléments simples et télescopage :

$$S_n := \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{3}{4},$$

ce qui répond à la question posée.

(b) D'abord on constate que, pour tout entier $n \geq 2$, pour tout $k \in [\![\, n^2\,;\,(n+1)^2-1 \,]\!]$, on a $\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor = n - n = 0$ et $\lfloor\sqrt{(n+1)^2-1+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{(n+1)^2-1}\rfloor = n+1-n = 1$. Ainsi, pour tout $N \geq 2$, en remarquant au préalable que, pour $k=1$, on a $\dfrac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k} = 0$, on obtient la décomposition suivante de la somme partielle d'ordre N^2-1 :

$$T_{N^2-1} := \sum_{k=1}^{N^2-1} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k} = \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} \frac{\lfloor\sqrt{k+1}\rfloor - \lfloor\sqrt{k}\rfloor}{k} = \sum_{n=1}^{N-1}\left(0+\ldots+0+\frac{1}{(n+1)^2-1}\right) = S_N,$$

avec les notations précédentes. Ainsi, la sous-suite de sommes partielles (T_{N^2-1}) converge d'après la question précédente vers $\frac{3}{4}$. Maintenant, la série en question étant à termes positifs, la suite (T_n) des sommes partielles est croissante, et donc a le même comportement que l'une quelconque de ses sous-suites. En particulier elle converge aussi vers $\frac{3}{4}$, ce qui répond à la question posée.

29. 2024 956 Mines PSI

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 avec $f(0) = 0$. Donner $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

Éléments de correction

On pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$. La fonction f admet le développement limité $f(t) = f'(0)t + t\theta(t)$ en zéro, où θ est une fonction de limite nulle en zéro. On en déduit que

$$u_n = f'(0)\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\,\theta\left(\frac{k}{n^2}\right) = f'(0)\frac{n+1}{2n} + v_n$$

avec $v_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\,\theta\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Montrons que la suite de terme général v_n converge vers zéro. Soit $\varepsilon > 0$ une précision arbitraire. Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in [0, \alpha]$, on ait $|\theta(x)| < \varepsilon$. Posons $N = \left\lfloor \frac{1}{\alpha} \right\rfloor$. Alors, pour tout $n > N$, on a $\frac{1}{n} < \alpha$, donc $\frac{k}{n^2} \in [0, \alpha]$ quel que soit l'entier k entre 1 et n. Par suite, pour tout $n > N$, $|v_n| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\left|\theta\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| < \frac{n+1}{2n}\varepsilon < \varepsilon$. On vient de montrer que (v_n) converge vers zéro et donc que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{f'(0)}{2}.$$

30. 2024 957 Mines PSI

Soient $x \in]0, 4[$ et $w = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{2} - 1\right) + \frac{\pi}{2}$.

(a) Montrer que $\cos(w) = 1 - \dfrac{x}{2}$.

(b) Montrer que $\cos\left(\dfrac{w}{2}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{w}{2}\right)$ sont positifs.

(c) Montrer que $\cos\left(\dfrac{w}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{4-x}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{w}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

(d) Montrer que $\text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) + \dfrac{\pi}{2} = 2\text{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x}{4-x}}\right)$.

Éléments de correction

(a) $\cos(w) = \cos\left(\text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2} - 1\right)\right) = -\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) = 1 - \dfrac{x}{2}$.

(b) $\frac{x}{2} - 1 \in \,]-1\,;1\,[$ donc $\text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2} - 1\right) \in \,]-\pi/2\,;\pi/2\,[$ et donc $w \in \,]\,0\,;\pi\,[$, soit $\frac{w}{2} \in \,]\,0\,;\pi/2\,[$.

On a donc $\cos\left(\frac{w}{2}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{w}{2}\right) > 0$.

(c) $\cos^2\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1+\cos(w)}{2} = 1 - \frac{x}{4}$. Et $\cos\left(\frac{w}{2}\right) > 0$, donc $\cos\left(\frac{w}{2}\right) = \sqrt{1-\frac{x}{4}} = \frac{\sqrt{4-x}}{2}$.
$\sin^2\left(\frac{w}{2}\right) = \frac{1-\cos(w)}{2} = \frac{x}{4}$. Et $\sin\left(\frac{w}{2}\right) > 0$, donc $\sin\left(\frac{w}{2}\right) = \sqrt{\frac{x}{4}} = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

(d) Il vient $\tan\left(\frac{w}{2}\right) = \sqrt{\frac{x}{4-x}}$, et comme $\frac{w}{2} \in \left]0\,;\pi/2\right[$, $\frac{w}{2} = \text{Arctan}\left(\tan\left(\frac{w}{2}\right)\right) = \text{Arctan}\sqrt{\frac{x}{4-x}}$.
Soit finalement $\text{Arcsin}\left(\dfrac{x}{2}-1\right) + \dfrac{\pi}{2} = w = 2\text{Arctan}\sqrt{\frac{x}{4-x}}$.

31. 2024 969 Mines PSI

(a) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$: $D_n(x) = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$. Si $x \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$, établir : $D_n(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sin\left((n+1/2)\,x\right)}{\sin(x/2)}$.

(b) Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1\left([0,\pi],\mathbb{R}\right)$. Montrer que $\displaystyle\lim_{\lambda\to+\infty} \int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(c) Exprimer $\displaystyle\int_0^{\pi} xD_n(x)\,\mathrm{d}x$ sous forme de somme et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Éléments de correction

(a) On calcule, pour $x \not\equiv 0\ (2\pi)$:

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} \cos(kx) = \frac{1}{2} Re\left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}\right) \\ &= \frac{1}{2} Re\left(e^{-inx}\frac{1-e^{i(2n+1)x}}{1-e^{ix}}\right) = \frac{1}{2} Re\left(\underbrace{e^{-inx}e^{i\frac{2n+1}{2}x}e^{-ix/2}}_{=1}\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\frac{x}{2}}\right) \\ &= \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

(Si $x \equiv 0\ [2\pi]$, alors $D_n(x) = n + 1/2$ ce qui coïncide avec le prolongement par continuité de l'expression demandée.)

(b) En intégrant par parties, on a $\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = -\varphi(\pi)\frac{\cos(\lambda\pi)}{\lambda} + \varphi(0)\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_0^{\pi} \varphi'(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x$.
La majoration $\left|-\varphi(\pi)\frac{\cos(\lambda\pi)}{\lambda}\right| \leq \frac{|\varphi(\pi)|}{\lambda}$ assure que $-\varphi(\pi)\frac{\cos(\lambda\pi)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$.
Bien sûr $\frac{\varphi(0)}{\lambda} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$.
Enfin la majoration $\left|\frac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi'(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^{\pi} |\varphi'(x)|\,\mathrm{d}x$ assure que $\frac{1}{\lambda}\displaystyle\int_0^{\pi} \varphi'(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$.
D'où le résultat voulu.

(c) On calcule :

$$\begin{aligned} \textstyle\int_0^{\pi} xD_n(x)\mathrm{d}x &= \textstyle\int_0^{\pi} \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} x\cos(kx)\mathrm{d}x \\ &= \textstyle\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} + \sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{x}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\sin(kx)\mathrm{d}x\right) \\ &= \textstyle\frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\left[\cos(kx)\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2} \end{aligned}$$

On applique alors la question précédente à $\varphi : x \mapsto \frac{x}{2\sin\frac{x}{2}}$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\pi]$, prolongeable par continuité en 0 (par la vaeur 1) et donc prolongeable en une fonction $\mathcal{C}^1$ car $\varphi'(x) = \frac{\sin(x/2) - x\cos(x/2)/2}{\sin(x/2)} \underset{x\to 0}{=} \frac{o(1)}{1/4+o(1)}$. Le théorème de limite de la dérivée assure que le prolongement est bien dérivable en 0 et que sa dérivée est continue en 0.
Ainsi, $\frac{\pi^2}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k-1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k-1}{k^2} &= \textstyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{4p^2} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{(2p-1)^2} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} \\ &= \textstyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{4p^2} - \left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{4p^2}\right) - \sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} \\ &= \textstyle\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2} - 2\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{4}\frac{2}{3} = \frac{\pi^2}{6}$$

32. 2024 216 ENS PSI

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$.

Montrer qu'il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\sqrt{n} - \sqrt{m} \in]\,a\,;b\,[$.

Éléments de correction

Le cas $a < 0 < b$ est trivial, il suffit de prendre $n = m(= 0)$. Supposons $0 \leq a < b$.

L'idée est que la suite $(\sqrt{n})$ est à croissance lente, vers $+\infty$. Précisément, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On fixe $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{\sqrt{m+1}+\sqrt{m}} < b - a$ et donc $\forall n \geq m$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < b - a$.

Comme $\sqrt{n} - \sqrt{m} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe un entier $n > m$ tel que $\sqrt{n} - \sqrt{m} > a$.

Et donc l'ensemble d'entiers $\left\{k > m \,|\, \sqrt{k} - \sqrt{m} > a\right\}$ est non vide, donc possède un plus petit élément.

Soit alors $n = \min\left\{k > m \,|\, \sqrt{k} - \sqrt{m} > a\right\}$.

Par construction $\sqrt{n} - \sqrt{m} > a$, et $\sqrt{n-1} - \sqrt{m} \leq a$ (si $n > m + 1$ alors $n - 1 > m$ et $n - 1 \notin \left\{k > m \,|\, \sqrt{k} - \sqrt{m} > a\right\}$, et le cas $n = m + 1$ donne $n - 1 = m$ donc $\sqrt{n-1} - \sqrt{m} = 0 \leq a$).

Enfin $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} < b - a$ par construction de m, donc en sommant les inégalités $\sqrt{n} - \sqrt{m} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \sqrt{n-1} - \sqrt{m} < b - a + a = b$. On a bien $a < \sqrt{n} - \sqrt{m} < b$.

Enfin si $a < b \leq 0$, on a par ce qui précède deux entiers n, m tels que $-b < \sqrt{n} - \sqrt{m} < -a$, et donc $a < \sqrt{m} - \sqrt{n} < b$.

33. 2024 412 X PSI

Soit $\alpha > 0$. Soient $(a_n), (b_n)$ et (c_n) trois suites réelles telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \frac{1}{\alpha}(b_n + c_n), b_{n+1} = \frac{1}{\alpha}(a_n + c_n), c_{n+1} = \frac{1}{\alpha}(a_n + b_n)$. Étudier leur comportement asymptotique.

Éléments de correction

On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, de sorte que $X_{n+1} = \frac{1}{\alpha}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$. Par récurrence, on a donc $X_n = \frac{1}{\alpha^n}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^n X_0$.

Or, notant J_3 la matrice Attila, on a $(J_3 - I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k}J_3^k$ (car J_3 et I_3 commutent) soit

$$\begin{aligned}(J_3 - I_3)^n &= (-1)^n I_3 + \textstyle\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^{k-1}J_3 \\ &= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(\textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^{n-k}3^k - (-1)^n\right) J_3 \\ &= (-1)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right) J_3\end{aligned}$$

Il vient $X_n = \frac{-1)^n}{\alpha^n}X_0 + \frac{2^n-(-1)^n}{3\alpha^n}J_3X_0$.

- Lorsque $\alpha > 2$, on a donc $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ soit $a_n, b_n, c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
- Lorsque $\alpha = 2$, on a $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}J_3X_0$ soit $a_n, b_n, c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a_0+b_0+c_0}{3}$.
- Enfin lorsque $\alpha < 2$ et $J_3X_0 \neq 0$ soit $a_0 + b_0 + c_0 \neq 0$, on a $a_n, b_n, c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2^n(a_0+b_0+c_0)}{3\alpha^n}$ donc $a_n, b_n, c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ selon le signe de $a_0 + b_0 + c_0$.
  Si $a_0 + b_0 + c_0 = 0$, on obtient $X_n = \frac{-1)^n}{\alpha^n}X_0$ soit $a_n = \frac{-1)^n}{\alpha^n}a_0, b_n = \frac{-1)^n}{\alpha^n}b_0$ et $c_n = \frac{-1)^n}{\alpha^n}c_0\ldots$

34. 2024 413 X PSI

Étudier la série $\sum(-1)^n\frac{\sin(\ln(n))}{n}$.

Éléments de correction

Soit S_n la somme partielle d'ordre n.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $S_{2n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(\ln(2k))}{2k} - \frac{\sin(\ln(2k+1))}{2k+1}$ puisque le terme d'indice 1 vaut 0.

Soit $u_n = \frac{\sin(\ln(2n))}{2n} - \frac{\sin(\ln(2n+1))}{2n+1} = \frac{\sin(\ln(2n))}{2n} - \frac{\sin(\ln(2n)+\ln(1+1/2n))}{2n+1}$.

On a $u_n = \sin(\ln(2n))\left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos\ln(1+1/2n)}{2n+1}\right) - \cos(\ln(2n))\frac{\sin(\ln(1+1/2n))}{2n+1}$.

Comme $\cos\ln(1+1/2n) = \cos(O(1/n)) = 1 + O(1/n^2)$, on a $\frac{1}{2n} - \frac{\cos\ln(1+1/2n)}{2n+1} = O(1/n^2)$. De même $\sin(\ln(1+1/2n)) = O(1/n)$ donc $\frac{\sin(\ln(1+1/2n))}{2n+1} = O(1/n^2)$. Enfin les termes $\cos(\ln(2n))$ et $\sin(\ln(2n))$ sont bornés (par 1), donc $u_n = O(1/n^2)$, et le critère de domination assure donc que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

On en déduit la convergence de la suite $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, et comme $S_{2n+1} - S_{2n} = -\frac{\sin(\ln(2n+1))}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que la suite $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également, vers la même limite.

Il s'ensuit que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{\cos(\ln n)}{n}$ converge.

35. 2024 415 X PSI

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$.

Éléments de correction

Commençons par noter que les fonctions constantes égales à 0 ou 1 conviennent. Et ce sont les seules fonctions constantes.

Soit désormais f une solution non constante du problème.

- $x = y = 0$ donne $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) = 0$ ou 1. Si $f(0) = 1$ alors $y = 0$ donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(0) = f(x)f(0)$ soit $f(x) = 1$. Or f est non constante, donc nécessairement $f(0) = 0$.
- $x = y = 1$ donne $f(1) = f(1)^2$ donc $f(1) = 0$ ou 1. Si $f(1) = 0$ alors $y = 1$ donne $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x)f(1)$ soit $f(x) = 0$. Or f est non constante, donc nécessairement $f(1) = 1$.
- f étant monotone avec $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, f est croissante, donc positive sur $\mathbb{R}_+$ et négative sur $\mathbb{R}_-$. Et pour $x \neq 0$, $1 = f(1) = f(x)f(1/x)$ donc f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Soit $x > 0$.
  - Une récurrence élémentaire donne $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x^n) = f(x)^n$.
  - Puis pour $n \in \mathbb{Z}_-$, on a $f(x^n)f(x^{-n}) = f(1) = 1$ donc $f(x^n) = 1/f(x^{-n}) = 1/f(x)^{-n} = f(x^n)$.
  - Puis, pour $r = p/q \in \mathbb{Q}$ (avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$), on a $f(x^r) = f((x^{1/q})^p) = f(x^{1/q})^p$. Et comme $f(x) = f((x^{1/q})^q) = f(x^{1/q})^q$ avec $f(x^{1/q}) > 0$, on a $f(x^{1/q}) = f(x)^{1/q}$, donc $f(x^r) = (f(x)^{1/q})^p = f(x)^r$.
  - Enfin soit $t \in \mathbb{R}$. On peut trouver deux suites (u_n) et (v_n) de rationnels de limite t avec $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq t \leq v_n$ (par exemple, les suites des approximations décimales de t par défaut et par excès).
    Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $x^{u_n} \leq x^t \leq x^{v_n}$ (si $x > 1$, sinon $x^{u_n} \geq x^t \geq x^{v_n}$) et par croissance de f, $f(x)^{u_n} = f(x^{u_n}) \leq f(x^t) \leq f(x^{v_n}) = f(x)^{v_n}$.
    Comme $f(x)^{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)^t$ et $f(x)^{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)^t$, on obtient en passant à la limite $f(x)^t \leq f(x^t) \leq f(x)^t$ donc $f(x^t) = f(x)^t$.

  N.B. On peut aussi introduire $g = \ln\circ f \circ \exp$, additive et monotone donc linéaire, par un raisonnement similaire.
- Notant $\alpha = f(e) \geq 1 = f(1)$, on a alors $\forall x > 0$, $f(x) = f(e^{\ln x}) = f(e)^{\ln x} = \alpha^{\ln x} = x^{ln(\alpha)} = x^a$, avec $a = \ln(\alpha) \geq 0$.
  Pour $x < 0$, on a $f(x)^2 = f(x^2) = f((-x)^2) = f(-x)^2 = (-x)^{2a}$ et $f(x) < 0$ donc $f(x) = -(-x)^a$.

Réciproquement, pour $a \geq 0$, la fonction $f : x \mapsto x^a$ si $x > 0$, $-(-x)^a$ si $x < 0$, 0 si $x = 0$ est bien solution du problème.

Probabilités

36. 2024 1603 IMT PSI

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère un graphe aléatoire non orienté à n sommets notés $A_1, \ldots, A_n$. La probabilité que les sommets A_i et A_j, pour $i \neq j$, soient reliés est égale à $p_n \in]0,1[$, et cela de façon indépendante. On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le sommet A_i est isolé, c'est-à-dire s'il n'est relié à aucun autre sommet. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

(a) Donner la loi de X_1. En déduire $\mathbf{E}(S_n)$.

(b) Donner une majoration de la probabilité d'avoir au moins un sommet isolé.

(c) On suppose que, pour $n \geqslant 2, p_n = C\dfrac{\ln(n)}{n}$ avec $C > 1$. Montrer : $\mathbf{P}(S_n \neq 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(a) X_1 prend les valeurs 0 et 1, $X_1 = 1$ si A_1 est isolé c'est à dire n'est relié à aucun autre point
donc $(X_1 = 1) = \bigcap_{k=2}^n (A_k$ et A_1 ne sont pas reliés). Ces événements étant indépendants,
$\mathbf{P}(X_1 = 1) = \prod_{k=2}^n \mathbf{P}(A_k$ et A_1 ne sont pas reliés) $= \prod_{k=2}^n (1-p_n) = (1-p_n)^{n-1}$
Donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}((1-p_n)^{n-1})$. Il en est de même de tous les X_i (rôles symétriques)
Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = n(1-p_n)^{n-1}$

(b) Par l'inégalité de Markov, $P(S_n \geq 1) \leq \frac{E(S_n)}{1} = n(1-p_n)^{n-1} = \alpha_n$

(c) On suppose que, pour $n \geqslant 2, p_n = C\dfrac{\ln(n)}{n}$ avec $C > 1$.

$\alpha_n = n\left(1 - C\frac{\ln(n)}{n}\right)^{n-1} = ne^{(n-1)\ln\left(1-C\frac{\ln(n)}{n}\right)} = ne^{(n-1)\left(-C\frac{\ln(n)}{n}\right)+O\left(\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2\right)}$

$= ne^{(-C\ln(n))+\left(C\frac{\ln(n)}{n}\right)+O\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)} = nn^{-C}e^{C\frac{\ln(n)}{n}}e^{O\left(\frac{\ln^2(n)}{n}\right)} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^{C-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Avec cela et la majoration de (b), on trouve $\mathbf{P}(S_n \neq 0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

37. 2024 1609 Ensea PSI

Soit A une matrice 2×2 dont les quatre coefficients sont des variables indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,0,1\}$. Calculer la probabilité que A soit inversible, puis que A soit de rang 1.

Notons $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, où $X \sim Y \sim Z \sim T \sim \mathcal{U}(\{-1,0,1\})$.

(a) A n'est pas inversible ssi $XT = YZ$ ssi $\begin{cases} & XT = YZ = 1 \\ \text{ou (disjoint)} & XT = YZ = 0 \\ \text{ou (disjoint)} & XT = YZ = -1 \end{cases}$

- $\mathbf{P}(XT = 1) = \mathbf{P}((X = 1 \cap T = 1) \cup (X = -1 \cap T = -1)) = \mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(T = 1) + \mathbf{P}(X = -1)\mathbf{P}(T = -1) = \frac{2}{9}$ (événements disjoints et variables indépendantes)
  de même $\mathbf{P}(YZ = 1) = \frac{2}{9}$ et enfin, puisque X, Y, Z, T sont indépendantes, $\mathbf{P}(XT = YZ = 1) = \frac{4}{81}$
- un calcul analogue donne $\mathbf{P}(XT = YZ = -1) = \frac{4}{81}$
- $\mathbf{P}(XT = 0) = \mathbf{P}((X = 0) \cup (T = 0)) = \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(T = 0) - \mathbf{P}((X = 0) \cap (T = 0)) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$
  de même $\mathbf{P}(YZ = 0) = \frac{5}{9}$ et enfin, puisque X, Y, Z, T sont indépendantes, $\mathbf{P}(XT = YZ = 0) = \frac{25}{81}$

Finalement $\mathbf{P}(A \text{ n'est pas inversible}) = \frac{4}{81} + \frac{4}{81} + \frac{25}{81} = \frac{33}{81} = \frac{11}{27}$ et donc $\mathbf{P}(A \text{ inversible}) = 1 - \frac{11}{27} = \frac{16}{27}$

(b) A est de rang 1 si et seulement si elle n'est pas inversible (colonnes proportionnelles) et elle est non nulle. Il y a en tout 81 matrices, équiprobables, parmi lesquelles (vu le calcul précédent) 33 ne sont pas inversibles (dont une est nulle) donc 32 sont de rang 1. On a donc $\mathbf{P}(A \text{ est de rang } 1) = \frac{32}{81}$.

38. 2024 1610 IMT PSI

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ une famille de variables i.i.d. suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On note $X = \text{card}\{i \leqslant n, X_i = 1\}$ et $Z = \text{card}\{i \leqslant n, X_i = X_1\}$.

(a) Préciser la loi de X, son espérance et sa variance.

(b) Les variables X et Z sont-elles indépendantes?

(c) Calculer la fonction génératrice de Z puis son espérance.

(a) X représente le nombre de réussites $(X_i = 1)$ lors de n expériences de Bernoulli indépendantes et de même paramètre donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ d'espérance $E(X) = np$ et de variance $V(X) = npq$ (en notant $q = 1 - p$).

(b) vu la loi binomiale, $(X = n)$ a pour probabilité $\mathbf{P}(X = n) = p^n$
$(Z = n) = ((X = n) \cup (X = 0))$ (réunion disjointe) a pour probabilité $\mathbf{P}(Z = n) = p^n + q^n$
et $((Z = n) \cap (X = n)) = (X = n)$ donc $\mathbf{P}((Z = n) \cap (X = n)) = p^n$ alors que $\mathbf{P}(Z = n)\mathbf{P}(X = n) = p^n(p^n + q^n)$
Donc si on suppose $p \in]0,1[$, on aura $\mathbf{P}((Z = n) \cap (X = n)) \neq \mathbf{P}(Z = n)\mathbf{P}(X = n)$: variable non indépendantes.
(justification : si $p \in]0,1[$ alors $p^n < p$ et de même $q^n < q$ donc $p^n + q^n < p + q = 1$)

(c) $Z(\Omega) = [\![1,n]\!]$. Formule des probabilités totales, sce $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$:
$\mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}(Z = k \mid X_1 = 0)\mathbf{P}(X_1 = 0) + \mathbf{P}(Z = k \mid X_1 = 1)\mathbf{P}(X_1 = 1)$
Sachant $(X_1 = 0)$ on a $(Z = k)$ réalisé ssi parmi les $n-1$ VA $X_2, \ldots, X_n$ exactement $k-1$ donnent un 0 (X_1 est déjà compté) : on reconnaît une loi binomiale $\mathcal{B}(n-1, q)$, donc $\mathbf{P}(Z = k \mid X_1 = 0) = \binom{n-1}{k-1}q^{k-1}p^{n-k}$
de même $\mathbf{P}(Z = k \mid X_1 = 1) = \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k}$
On a alors $\mathbf{P}(Z = k) = \left(\binom{n-1}{k-1}q^{k-1}p^{n-k}\right)q + \left(\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}q^{n-k}\right)p = \binom{n-1}{k-1}q^kp^{n-k} + \binom{n-1}{k-1}p^kq^{n-k}$

La fonction génératrice de Z est

$$\begin{aligned}
G_Z(t) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n-1}{k-1}q^k p^{n-k} + \binom{n-1}{k-1}p^k q^{n-k}\right)t^k \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\left(\binom{n-1}{i}q^{i+1}p^{n-(i+1)}t^{i+1} + \binom{n-1}{i}p^{i+1}q^{n-(i+1)}t^{i+1}\right) \\
&= qt\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(qt)^i p^{n-1-i} + pt\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(pt)^i q^{n-1-i} \\
&= qt(qt+p)^{n-1} + pt(pt+q)^{n-1}
\end{aligned}$$

On a donc $G_Z'(t) = q(qt+p)^{n-1} + qt(n-1)q(qt+p)^{n-2} + p(pt+q)^{n-1} + pt(n-1)p(pt+q)^{n-2}$ (on suppose $n \geq 2$) donc $E(Z) = G_Z'(1) = q + (n-1)q^2 + p + (n-1)p^2 = 1 + (n-1)(p^2+q^2)$ (encore vrai si $n = 1$).

39. 2024 1314 Centrale PSI

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et N leur somme. Une urne contient initialement a boules vertes et b boules rouges. On effectue une suite de tirages selon le protocole suivant : si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne; si elle est verte, elle est remplacée par une boule rouge prise dans une réserve annexe. On définit deux variables aléatoires: T_k vaut 1 si l'on pioche une boule verte au k-ième tirage et 0 sinon; X_k est le nombre de boules vertes piochées lors des k premiers tirages.

(a) Déterminer la loi de T_1 et celle de T_2.

(b) Montrer que $\mathbf{P}(T_{n+1} = 1) = \dfrac{a - \mathbf{E}(X_n)}{N}$. En déduire que $\mathbf{P}(T_n = 1) = a\dfrac{(N-1)^{n-1}}{N^n}$.

(c) Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ puis déterminer sa limite quand n tend vers l'infini.

(a) Les T_k sont des variables de Bernoulli : leurs lois sont donc déterminées par les $P(T_k = 1)$. Par équiprobabilité de chaque tirage, $P(T_1 = 1) = \frac{\text{nombre de boules vertes}}{\text{nombre total de boules}} = \frac{a}{N}$. Pour T_2, on utilise les probabilités totales par rapport au système complet associé à T_1 :

$$P(T_2 = 1) = P(T_2 = 1|T_1 = 0)P(T_1 = 0) + P(T_2 = 1|T_1 = 1)P(T_1 = 1) = \frac{a}{N}\left(1 - \frac{a}{N}\right) + \frac{a-1}{N}\frac{a}{N} = \frac{(N-1)a}{N^2}$$

(b) Intéressant ! Une idée est de considérer le nombre de boules vertes restant dans l'urne après n tirages : c'est exactement $a - X_n$. On utilise alors la formule des probabilités totales associée à X_n pour calculer la probabilité recherchée :

$$\begin{aligned}
P(T_{n+1} = 1) &= \sum_{k \in X_n(\Omega)} P(T_{n+1} = 1|X_n = k)P(X_n = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{a-k}{N} P(X_n = k) \\
&= \frac{1}{N}\left(a\sum_{k=0}^{n} P(X_n = k) - \sum_{k=0}^{n} kP(X_n = k)\right) \\
&= \frac{a - E(X_n)}{N}
\end{aligned}$$

Puisque $X_{n+1} = X_n + T_{n+1}$, par linéarité de l'espérance on en déduit que, en notant pour tout k $p_k := P(T_k = 1)$:

$$p_{n+2} = \frac{a - E(X_n) - p_{n+1}}{N} = p_{n+1} - \frac{p_{n+1}}{N},$$

ce qui prouve que la suite (p_n) est géométrique de raison $1 - \frac{1}{N} = \frac{N-1}{N}$. On en déduit donc que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1} p_1 = a\frac{(N-1)^{n-1}}{N^n}$.

(c) Ainsi, puisque $X_n = \sum\limits_{k=1}^{n} T_k$, on a par linéarité de l'espérance et du fait que (p_n) soit géométrique de raison $1 - \frac{1}{N} \neq 1$:

$$E(X_n) = \sum_{k=1}^{n} E(T_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k = p_1\frac{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n}{1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)} = a\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} a$$

40. 2024 982 Mines PSI

(a) Dans une urne, on trouve n boules noires et n boules blanches. On tire sans remise des boules jusqu'à ce qu'il ne reste plus de boule d'une des deux couleurs. Soit X_n la variable aléatoire qui représente le nombre de boules restantes dans l'urne à la fin des tirages. Donner la loi de X_n.

(b) On dispose maintenant de deux urnes contenant n boules chacune. On tire sans remise de manière équiprobable soit dans l'urne 1 soit dans l'urne 2 une boule jusqu'à ce qu'une des deux urnes soit vide. Soit Y_n le nombre de boules restantes dans l'urne non vidée après l'expérience. Donner la loi de Y_n.

(a) • Déjà, on a $X_n(\Omega) = [\![1\,;\, n]\!]$.
• Une façon de modéliser l'expérience avec équiprobabilité est de considérer que les tirages continuent jusqu'à épuisement des boules, et donc qu'on travaille avec les mots de $2n$ lettres avec n B et n N, tous étant équiprobables. Il y a $\binom{2n}{n}$ tels mots. Soit alors $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. Dire que $X_n = k$, c'est dire que :
– soit il ne reste que k boules blanches, auquel cas le mot correspondant est de la forme

$$\underbrace{*\cdots*}_{(2n-k-1)\text{ premières}} \quad \underset{(2n-k)\text{-ème}}{N} \quad \underbrace{B\ldots B}_{k\text{ dernières, blanches}}$$

et les $2n-k-1$ premières lettres contiennent les $n-1$ N différents de la $(2n-k)$-ème : $\binom{2n-k-1}{n-1}$ possibilités.
– soit il ne reste que k noires, et c'est pareil.
Au final, on a

$$P(X_n = k) = \frac{2\binom{2n-k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{2n^2(n-1)\ldots(n-k+1)}{2n(2n-1)\ldots(2n-k)} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(2n-1)\ldots(2n-k)}$$

(b) • De même, $Y_n(\Omega) = [\![1\,;\, n]\!]$.
• Si on note T_k le résultat du k-ème tirage au sort (mettons 1 pour l'urne 1 et 0 pour l'urne 2), alors $T_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1/2)$, et le nombre de boules 1 tirées après p tirages est $S_p := \sum_{k=1}^{p} T_k$, qui suit par indépendance des T_k la loi binomiale $\mathcal{B}(p, 1/2)$. Fixons $k \in [\![1\,;\, n]\!]$. On a alors, au niveau des événements (en suivant la logique de la question précédente, mais avec un autre langage),

$$\begin{aligned}(Y_n = k) &= (S_{2n-k} = n, S_{2n-k-1} = n-1) \uplus (S_{2n-k} = n-k, S_{2n-k-1} = n-k)\\ &= (S_{2n-k-1} = n-1, T_{2n-k} = 1) \uplus (S_{2n-k-1} = n-k, T_{2n-k} = 0).\end{aligned}$$

ce qui, par indépendance et incompatibilité, donne

$$P(Y_n = k) = \binom{2n-k-1}{n-1}\frac{1}{2^{2n-k-1}}\frac{1}{2} + \binom{2n-k-1}{n-k}\frac{1}{2^{2n-k-1}}\frac{1}{2} = \binom{2n-k-1}{n-1}\frac{1}{2^{2n-k-1}}.$$

41. 2024 983 Mines PSI

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de $[\![1\,;\, n]\!]$. On suppose que, pour tous $A, B \in \mathcal{A}$, l'inclusion $A \subset B$ implique l'égalité $A = B$. Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1\,;\, n]\!]$. On munit $\mathcal{S}_n$ de la distribution uniforme de probabilité. Si A est une partie de $[\![1\,;\, n]\!]$, soit X_A la variable de Bernoulli égale à 1 si $\sigma(A) = A$.

(a) Quelle est la loi de X_A ?

(b) Si $A, B \in \mathcal{A}$, les variables X_A et X_B sont-elles indépendantes?

(a) Puisqu'on travaille avec la probabilité uniforme, il suffit de quotienter le nombre de permutations laissant A globalement invariant (on aura alors $\sigma(A) = A$ par injectivité et cardinal fini) par le nombre total $n!$ de permutations. Or se donner une telle permutation revient à se donner ses restrictions à A et $[\![1\,;\, n]\!] \setminus A$: $p!(n-p)!$ possibilités, avec $p := \mathrm{Card}(A)$. On en déduit que

$$P(X_A = 1) = \frac{1}{\binom{n}{\mathrm{Card}(A)}},$$

ce qui détermine complètement la loi de X_A.

(b) On suppose $A \neq B$ dans $\mathcal{A}$ (sinon, il n'y a indépendance que si $P(X_A = 1) = 0$ ou 1, i.e. $A = \emptyset$ ou $A = [\![1\,;\, n]\!]$).
L'hypothèse faite sur $\mathcal{A}$ prouve que $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$. Autrement dit, si $p := \mathrm{Card}(A)$, $q := \mathrm{Card}(B)$ et $r := \mathrm{Card}(A \cap B)$, on a $0 \leq r < \min\{p, q\}$. Maintenant, X_A et X_B étant de Bernoulli, elles sont indépendantes si, et seulement si, $P(X_A X_B = 1) = P(X_A = 1)P(X_B = 1)$. Or, au niveau des événements, $(X_A X_B = 1) = (\sigma(A) = A, \sigma(B) = B)$. Il reste à compter le nombre de permutations dans cet événement. Se donner une telle permutation revient à se donner ses restrictions à chaque morceau de la partition

$$[\![1\,;\, n]\!] = (A \cap B) \uplus (A \setminus B) \uplus (B \setminus A) \uplus ([\![1\,;\, n]\!] \setminus (A \cup B)),$$

chacun étant invariant par celles-ci. On en déduit qu'il y a $r!(p-r)!(q-r)!(n-p-q+r)!$ telles permutations, ce qui donne

$$P(X_A = 1, X_B = 1) = \frac{r!(p-r)!(q-r)!(n-p-q+r)!}{n!},$$

à comparer avec

$$P(X_A = 1)P(X_B = 1) = \frac{p!(n-p)!q!(n-q)!}{(n!)^2}.$$

Il n'y a jamais égalité : le quotient égale

$$\frac{r!(p-r)!(q-r)!(n-p-q+r)!(n!)^2}{p!(n-p)!q!(n-q)!n!} = \frac{\binom{n}{q}}{\binom{p}{r}\binom{n-p}{q-r}},$$

et, ayant d'après Vandermonde $\binom{n}{q} = \sum_{k=0}^{q} \binom{p}{k}\binom{n-p}{q-k}$, le quotient est toujours >1 si cette somme compte au moins deux termes non nuls. Or ceci est faux uniquement s'il n'y a qu'un seul k tel que $0 \leq k \leq p$ et $0 \leq q-k \leq n-p$, i.e. (en supposant $p \leq q$ pour simplifier, les rôles sont symétriques) $p = q+p-n$, i.e. $q = n$, ce qui est exclu.

On en conclut qu'il n'y a jamais indépendance si $A \neq B$.

42. 2024 216 ENS PSI

Soit $n \geqslant 2$. On note $n = p_1^{s_1} \dots p_r^{s_r}$ sa décomposition en facteurs premiers. On munit $\Omega = \{1, \dots, n\}$ de la loi de probabilité uniforme. Pour tout diviseur d de n, on note A_d l'ensemble des multiples de d contenus dans Ω : $A_d = \{kd,\ k \leqslant \frac{n}{d}\}$.

(a) Montrer que si d et d' sont deux entiers premiers entre eux, alors $A_d \cap A_{d'} = A_{dd'}$, et en déduire que A_d et A'_d sont indépendants.

(b) On pose $B = \{k \in \Omega,\ k \wedge n = 1\}$. Exprimer B en fonction des A_p, et en déduire une expression de $P(B)$ puis de $|B|$. Cette valeur sera notée $\varphi(n)$.

(c) Soient n et m sont deux entiers premiers entre eux. Montrer que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

Éléments de correction

(a) Soit $k \in A_d \cap A_{d'}$. k est multiple de d et d', premiers entre eux, donc de dd', autrement dit $k \in A_{dd'}$. Réciproquement, si $k \in A_{dd'}$ alors k est multiple de dd' donc de d et d', autrement dit $k \in A_d \cap A_{d'}$.

On en déduit que $P(A_d \cap A_{d'}) = P(A_{dd'}) = \frac{\mathrm{Card}(A_{dd'})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{\frac{n}{dd'}}{n} = \frac{1}{dd'} = \frac{\mathrm{Card}(A_d)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \frac{\mathrm{Card}(A_{d'})}{\mathrm{Card}(\Omega)} = P(A_d)P(A_{d'})$, autrement dit A_d et $A_{d'}$ sont indépendants.

(b) On montre de même (par récurrence) que si $d_1, \dots, d_r$ sont des diviseurs de n premiers entre eux deux à deux alors $A_{d_1}, \dots, A_{d_r}$ sont mutuellement indépendants, et donc leurs événements contraires aussi.

Or B est exactement l'ensemble des entiers $k \in \Omega$ qui ne sont multiples d'aucun des p_i, $1 \leq i \leq r$, c'est-à-dire que $B = \bigcap_{1 \leq i \leq r} \overline{A_{p_i}}$.

Par indépendance mutuelle, $P(B) = \prod_{i=1}^{r} P(\overline{A_{p_i}}) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

Et donc $\varphi(n) = \mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(\Omega)P(B) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

(c) Soit n et m deux entiers premiers entre eux. On note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers de n, de multiplicités $s_1, \dots, s_r$ et $p_{r+1}, \dots, p_{r'}$ ceux de m, de multiplicités $s_{r+1}, \dots, s_{r'}$.

Alors $nm = \prod_{i=1}^{r'} p_i^{s_i}$ donc $\varphi(nm) = nm \prod_{i=1}^{r'} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) m \prod_{i=r+1}^{r'} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = \varphi(n)\varphi(m)$.