Programme I - semaine du 16 septembre

Chapitre I - Espaces vectoriels et applications linéaires : rappels et compléments

- Définition d'un espace vectoriel, exemple des $\mathbb{K}^n$ et des espaces de fonctions. Définition d'un sous-espace vectoriel, sous-espace vectoriel engendré, exemples.
- Définition d'une application linéaire. Exemples, notamment de l'évaluation en un ou plusieurs points.

  Opérations dans $\mathcal{L}(\mathrm{E})$. Formule du binôme et identité de factorisation pour des endomorphismes qui commutent.
- Rappel sur l'image et le noyau, caractérisation de la surjectivité et de l'injectivité.

  Toute application linéaire induit un isomorphisme entre tout supplémentaire du noyau et l'image. Application aux polynômes interpolateurs de Lagrange, base de $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$.
- Familles libres, familles génératrice, bases.

  Rappels de théorie de la dimension : **théorème de la base incomplète,** cardinal d'une bases. Familles libres ou génératrice à n éléments (où $\dim \mathrm{E} = n$). Dimension d'un sous-espace vectoriel. Dimension d'une somme directe, d'une somme (formule de Grassmann), **théorème du rang.**
- Somme de n sous-espaces vectoriels : définition, éléments. Sommes directes, **caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.** Sous-espaces supplémentaires. Base adaptée à une décomposition en sous-espaces supplémentaires.

  $\dim \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{F}_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \dim \mathrm{F}_i$. Égalité si et seulement si $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n$ sont en somme directe
- Caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base / par sa restriction à une famille de supplémentaires.
- Polynômes d'endomorphisme : morphisme de substitution $\mathrm{P} \longmapsto \mathrm{P}(u)$, où $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est un endomorphisme fixé. Algèbre $\mathbb{K}[u]$. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{Ker}\, \mathrm{P}(u)$ (et $\mathrm{Im}\, \mathrm{P}(u)$) est stable par u.

  Ensemble des polynômes annulateur de $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, non trivial si E est de dimension finie. Application au calcul des puissances de l'inverse. Lien entre le degré du plus petit polynôme annulateur et la dimension de $\mathbb{K}[u]$.

Chapitre II - Matrices : rappels et complements

- Définition du produit matriciel. Effet du produit à gauche ou à droite par une matrice élémentaire. , par une matrice diagonale.

  Propriétés algébriques usuelles. Structure d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sous-algèbre des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).
- Matrices inversibles. Méthode pratique d'inversion, via la résolution d'un système linéaire. **Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible.** Utilisation d'un polynôme annulateur pour inverser une matrice. M^{-1} est un polynôme en M.
- Produit par blocs. Structure de sous-algèbre de l'ensemble des matrices triangulaires par blocs. L'inverse d'une triangulaire (resp. diagonale) par blocs l'est encore.
- Matrice d'une famille de vecteurs, lien entre rang de la matrice et rang de la famille. Matrice d'une application linéaire. Matrice d'une composée. Matrice de passage : définition, changement de coordonnées. Formule de changement de base pour la matrice d'une application linéaire.
- Matrices semblables. Définition, caractérisation (A et B représentent un même endomorphisme). Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B). A et B ont les mêmes polynômes annulateurs.

  Trace. Invariance par similitude, trace d'un endomorphisme. Exemple des projecteurs.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Caractérisation en dimension finie
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible.
- Existence de polynômes annulateurs d'un endomorphisme en dimension finie.
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B).