Devoir Maison n° 2 - pour le 27/09

Pseudo-inverse et matrices stochastiques

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on note $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, on appelle endomorphisme canoniquement associé à M, l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, noté m, dont M est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Si $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $\mathrm{M}(i,j)$ représente le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice M. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. La matrice (colonne) de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 est notée J_n. Pour $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, on considère la norme

$$\|\mathrm{M}\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{r} |\mathrm{M}(i,j)|$$

Définition 1. *On dit qu'une matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est positive (respectivement strictement positive), lorsque tous ses coefficients sont positifs (respectivement strictement positifs).*
Une matrice positive $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsque $\mathrm{MJ}_m = \mathrm{J}_n$.
On désigne par $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes stochastiques.

On admet le théorème suivant :

Théorème. *Soit P une matrice stochastique strictement positive de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Le réel 1 est valeur propre simple de P et il existe un unique élément de $\mathcal{K}_n$, noté X_∞, tel que $\mathrm{X}_\infty = \mathrm{X}_\infty \mathrm{P}$*
De plus, quel que soit $\mathrm{X} \in \mathcal{K}_n$,

$$\mathrm{X}_\infty = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{XP}^j$$

L'objectif de ce problème est de trouver une méthode de calcul de X_∞ en utilisant la notion de pseudo-inverse.

Définition 2. *Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, une matrice $\mathrm{A}' \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ est un pseudo-inverse de A lorsque les trois propriétés suivantes sont satisfaites :*

$$\mathrm{AA}' = \mathrm{A}'\mathrm{A} \tag{1}$$

$$\mathrm{A} = \mathrm{AA}'\mathrm{A} \tag{2}$$

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}'\mathrm{AA}' \tag{3}$$

Dorénavant, P est une matrice stochastique, strictement positive, de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

1 Préliminaires.

1. Montrer que $\|\mathrm{MN}\| \leq \|\mathrm{M}\|.\|\mathrm{N}\|$ pour toutes les matrices $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{N} \in \mathcal{M}_{r,m}(\mathbb{K})$.
2. Montrer que $\|\mathrm{P}\| = 1$.
3. Montrer que pour tout $k \geq 1$, P^k est une matrice stochastique.

2 Pseudo-inverses.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

4. Montrer que l'existence d'un pseudo inverse implique que $\mathrm{rang}(a) = \mathrm{rang}(a^2)$.

Inversement, on suppose maintenant que $\mathrm{rang}(a) = \mathrm{rang}(a^2)$. On note r cet entier.

5. Montrer que le noyau et l'image de a sont en somme directe : $\mathbb{R}^n = \mathrm{Im}(a) \oplus \mathrm{Ker}(a)$.
6. Montrer qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$, B inversible et $\mathrm{W} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$, W inversible, telles que $\mathrm{A} = \mathrm{W} \begin{pmatrix} \mathrm{B} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{W}^{-1}$.

7. Montrer que A admet au moins un pseudo-inverse.

Considérons un pseudo-inverse quelconque A' de A et a' l'endomorphisme canoniquement associé à A'.

8. Montrer que $\mathrm{Ker}(a)$ et $\mathrm{Im}(a)$ sont stables par a' et montrer qu'il existe $\mathrm{D} \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}' = \mathrm{W}\begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\mathrm{W}^{-1}$

9. Montrer que aa' est un projecteur dont on précisera le noyau et l'image en fonction de ceux de a et préciser $\mathrm{W}^{-1}(\mathrm{AA}')\mathrm{W}$.

10. Montrer que A admet au plus un pseudo-inverse.

3 Calcul de X_∞.

À tout endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$, on associe l'endomorphisme u_c de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$u_c(x + iy) = u(x) + iu(y),$$

pour tout x, y appartenant à $\mathbb{R}^n$. Dans les questions suivantes, on note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n - \mathrm{P}$.

11. Montrer que $a_c \circ a_c = (a^2)_c$.

12. Montrer que $a_c(\mathbb{C}^n) = a_c^2(\mathbb{C}^n)$

13. Montrer que $\mathrm{rang}(a) = \mathrm{rang}(a^2) = n - 1$.

On note A', le pseudo-inverse dont l'existence et l'unicité sont garantis par ce qui précède.

14. Soit $\mathrm{C} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ inversible. Etablir, pour tout entier non nul k, l'identité $\sum_{j=0}^{k-1}(\mathrm{I}_n - \mathrm{C})^j = (\mathrm{I}_n - (\mathrm{I}_n - \mathrm{C})^k)\mathrm{C}^{-1}$.

15. Etablir, pour tout entier naturel non nul k, l'identité suivante : $\sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{P}^j = (\mathrm{I}_n - \mathrm{P}^k)\mathrm{A}' + k(\mathrm{I}_n - \mathrm{AA}')$.

16. Montrer que

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{P}^j$$

existe et donner sa valeur.

17. Montrer que $(\mathrm{I}_n - \mathrm{AA}')$ est stochastique et que $(\mathrm{I}_n - \mathrm{AA}')\mathrm{A} = 0$.

18. Montrer que $\mathrm{I}_n - \mathrm{AA}' = \mathrm{J}_n\mathrm{X}_\infty$.