Programme II - semaine du 22 septembre

Chapitre II - Matrices : rappels et complements

- Définition du produit matriciel. Effet du produit à gauche ou à droite par une matrice élémentaire, par une matrice diagonale.

  Propriétés algébriques usuelles. Structure d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sous-algèbre des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).

- Matrices inversibles. Méthode pratique d'inversion, via la résolution d'un système linéaire. **Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible.** Utilisation d'un polynôme annulateur pour inverser une matrice. M^{-1} est un polynôme en M.

- Produit par blocs. Structure de sous-algèbre de l'ensemble des matrices triangulaires par blocs. L'inverse d'une triangulaire (resp. diagonale) par blocs l'est encore.

- Matrice d'une famille de vecteurs, lien entre rang de la matrice et rang de la famille. Matrice d'une application linéaire. Matrice d'une composée. Matrice de passage : définition, changement de coordonnées. Formule de changement de base pour la matrice d'une application linéaire.

- Matrices semblables. Définition, caractérisation (A et B représentent un même endomorphisme). Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B). A et B ont les mêmes polynômes annulateurs, même trace.

- Trace d'un endomorphisme. Exemple des projecteurs. Exemple des nilpotents.

Chapitre III : Déterminants : rappels et complements

- Définition du déterminant de base $\mathcal{B}$. Changement de base : lien entre les deux déterminants. Caractérisation des bases.

- Déterminant d'une matrice. Propriétés opératoires : déterminant de l'identité, produit par un scalaire, déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles.

  Déterminant d'une matrice triangulaire, triangulaire par blocs.

  Déterminant de la transposée.

- Déterminant d'un endomorphisme.

- Calcul du déterminant : opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'un déterminant.

  Déterminant de Vandermonde.

  Développement selon une colonne ou une ligne. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

  Le déterminant d'une matrice est polynomial en les coordonnées.

- Orientation d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Orientation d'un hyperplan.

Chapitre IV : Réduction des endomorphismes (tout début)

- Notion de vecteur propre, de valeur propre, spectre, sous-espace propre. Spectre de $\mathrm{P}(u)$, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

  Les sous-espaces propres sont en somme directe.

- **Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.**

- Polynôme caractéristique. **Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.**

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme (d'un supplémentaire du noyau sur l'image), théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul. Caractérisation en dimension finie
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible.
- Existence de polynômes annulateurs d'un endomorphisme en dimension finie.
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B).
- Déterminant de VanderMonde.
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.