Programme III - semaine du 29 septembre

Chapitre III : Déterminants : rappels et complements

- Définition du déterminant de base $\mathcal{B}$. Changement de base : lien entre les deux déterminants. Caractérisation des bases.

  Orientation d'u $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- Déterminant d'une matrice. Propriétés opératoires : déterminant de l'identité, produit par un scalaire, déterminant d'un produit. Caractérisation des matrices inversibles.

  Déterminant d'une matrice triangulaire, triangulaire par blocs.

  Déterminant de la transposée.

- Déterminant d'un endomorphisme.

- Calcul du déterminant : expression analytique pour $n = 2$, $n = 3$ (formule de Sarrus). opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'un déterminant.

  Déterminant de Vandermonde.

  Développement selon une colonne ou une ligne. Déterminants tridiagonaux. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

Chapitre IV : Réduction des endomorphismes

- Notion de vecteur propre, de valeur propre, spectre, sous-espace propre. Spectre de $\mathrm{P}(u)$, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

  Les sous-espaces propres sont en somme directe.

- **Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.**

- Polynôme caractéristique. **Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.**

  Lien entre la dimension des sous-espaces propres et la multiplicité : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ 1 \leq \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leq m_\lambda$.

- Endomorphisme et matrice diagonalisable.

- Utilisation du polynôme caractéristique : u **est diagonalisable si et seulement si** χ_u **est scindé et pour toute valeur propre** λ**, on a** $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$**.** Conséquence : si χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable.

- Théorème de Cayley-Hamilton.

- Condition nécessaire (en dimension finie) et suffisante de diagonalisabilité : **existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples.**

  Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable. Diagonalisation de l'endomorphisme induit. Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est diagonalisable, les sous-espaces stables par u sont les sous-espaces engendré par des familles de vecteurs propres de u.

- Traduction matricielle de tous les résultats de réduction.

- Trigonalisation : u **est trigonalisable ssi** χ_u **est scindé.** (Idem avec un polynôme annulateur scindé.)

  Conséquence : tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie est trigonalisable.

  Utilisation pour le calcul des valeurs propres non nulles d'endomorphismes de rang 1 ou 2.

N.B. On commencera si possible par un exercice de réduction pratique (matrice carrée de taille 3 par exemple).

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$ (dem).
- Théorème de trigonalisation (énoncé).