Programme IV - semaine du 7 octobre

Chapitre IV : Réduction des endomorphismes

- Notion de vecteur propre, de valeur propre, spectre, sous-espace propre. Spectre de $\mathrm{P}(u)$, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

  Les sous-espaces propres sont en somme directe.

- **Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.**

- Polynôme caractéristique. **Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.**

  Lien entre la dimension des sous-espaces propres et la multiplicité : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ 1 \leq \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leq m_\lambda$.

- Endomorphisme et matrice diagonalisable. Définition, caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.

- Utilisation du polynôme caractéristique : u **est diagonalisable si et seulement si** χ_u **est scindé et pour toute valeur propre** λ**, on a** $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$**.** Conséquence : si χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable.

- Théorème de Cayley-Hamilton.

- Condition nécessaire (en dimension finie) et suffisante de diagonalisabilité : **existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples.**

  Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable. Diagonalisation de l'endomorphisme induit. Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est diagonalisable, les sous-espaces stables par u sont les sous-espaces engendré par des familles de vecteurs propres de u.

- Trigonalisation : u **est trigonalisable ssi** χ_u **est scindé.** (Idem avec un polynôme annulateur scindé.)

  Conséquence : tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie est trigonalisable.

  Utilisation pour le calcul des valeurs propres non nulles d'endomorphismes de rang 1 ou 2.

- Applications de la réduction : calcul des puissances d'une matrice, des polynômes, du commutant, des sous-espaces stables…

Chapitre V : Intégrales impropres (début, cours seulement)

- Introduction : intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment. Notion générale de fonction continue par morceaux (sa restriction à tout segment l'est).

- Définition d'une intégrale impropre convergente. Intégrales de Riemann (en 0 et en $+\infty$), intégrales d'exponentielles décroissantes et intégrale de la fonction $\ln$ au voisinage de 0.

- Convergence des intégrales faussement impropres.

- Relation de Chasles et indépendance de la borne atteinte : la convergence de $\displaystyle\int_{[\,a\,;b\,[} f$ ne dépend pas du choix de a.

  Intégrales doublement impropres : $\displaystyle\int_{]\,a\,;b\,[} f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{]\,a\,;c\,]} f$ et $\displaystyle\int_{[\,c\,;b\,[} f$ convergent pour un $c \in\,]\,a\,;b\,[$ (et donc pour tout $c \in\,]\,a\,;b\,[$).

- Existence d'intégrales sur $\mathbb{R}_+$ convergentes dont l'intégrande ne tend pas vers 0. Inversement, le fait que l'intégrande tende vers 0 n'entraîne pas la convergence de l'intégrale. En revanche, si $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \neq 0$ alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} f$ diverge.

- Propriétés de linéarité (et lien entre l'intégrale de f complexe et celle des ses parties réelles et imaginaires) ; de positivité / croissance.

  Si f est continue, positive et d'intégrale nulle alors f est identiquement nulle. Si f n'est que continue par morceaux, f est nulle sauf sur un ensemble discret.

- Calcul d'une intégrale impropre : via une primitive ; théorème de changement de variable (qui assure la convergence de la nouvelle intégrale) ; intégration par parties (licite seulement si le terme intégré admet des limites finies aux bornes, assure alors la convergence du nouveau terme intégral).

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$ (dem).
- Théorème de trigonalisation (énoncé).
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres (énoncé précis).