Programme IV - semaine du 7 octobre

Chapitre IV : Réduction des endomorphismes

- Notion de vecteur propre, de valeur propre, spectre, sous-espace propre. Spectre de $\mathrm{P}(u)$, pour $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.
  Les sous-espaces propres sont en somme directe.
- **Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur.**
- Polynôme caractéristique. **Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.**
  Lien entre la dimension des sous-espaces propres et la multiplicité : $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u),\ 1 \leq \dim \mathrm{E}_\lambda(u) \leq m_\lambda$.
- Endomorphisme et matrice diagonalisable. Définition, caractérisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
- Utilisation du polynôme caractéristique : u **est diagonalisable si et seulement si** χ_u **est scindé et pour toute valeur propre** λ**, on a** $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$**.** Conséquence : si χ_u est scindé à racines simples alors u est diagonalisable.
- Théorème de Cayley-Hamilton.
- Condition nécessaire (en dimension finie) et suffisante de diagonalisabilité : **existence d'un polynôme annulateur scindé à racines simples.**
  Sous-espaces stables par un endomorphisme diagonalisable. Diagonalisation de l'endomorphisme induit. Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est diagonalisable, les sous-espaces stables par u sont les sous-espaces engendré par des familles de vecteurs propres de u.
- Trigonalisation : u **est trigonalisable ssi** χ_u **est scindé.** (Idem avec un polynôme annulateur scindé.)
  Conséquence : tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie est trigonalisable.
  Utilisation pour le calcul des valeurs propres non nulles d'endomorphismes de rang 1 ou 2.
- Applications de la réduction : calcul des puissances d'une matrice, des polynômes, du commutant, des sous-espaces stables...

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$ (dem).
- Théorème de trigonalisation (énoncé).