Programme VI - semaine du 4 novembre

Chapitre V : Intégrales impropres

- Introduction : intégration des fonctions continues par morceaux sur un segment. Notion générale de fonction continue par morceaux (sa restriction à tout segment l'est).
- Définition d'une intégrale impropre convergente. Intégrales de Riemann (en 0 et en $+\infty$), intégrales d'exponentielles décroissantes et intégrale de la fonction $\ln$ au voisinage de 0.
- Convergence des intégrales faussement impropres.
- Relation de Chasles et indépendance de la borne atteinte : la convergence de $\displaystyle\int_{[\,a\,;b\,[} f$ ne dépend pas du choix de a.

  Intégrales doublement impropres : $\displaystyle\int_{]\,a\,;b\,[} f$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{]\,a\,;c\,]} f$ et $\displaystyle\int_{[\,c\,;b\,[} f$ convergent pour un $c \in \,]\,a\,;b\,[$ (et donc pour tout $c \in \,]\,a\,;b\,[$).
- Exemples d'intégrales sur $\mathbb{R}_+$ convergentes dont l'intégrande ne tend pas vers 0. Inversement, le fait que l'intégrande tende vers 0 n'entraîne pas la convergence de l'intégrale. En revanche, si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell \neq 0$ alors l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} f$ diverge.
- Propriétés de linéarité (et lien entre l'intégrale de f complexe et celle des ses parties réelles et imaginaires) ; de positivité / croissance.

  Si f est continue, positive et d'intégrale nulle alors f est identiquement nulle. Si f n'est que continue par morceaux, f est nulle sauf sur un ensemble discret.
- Calcul d'une intégrale impropre : via une primitive ; théorème de changement de variable (qui assure la convergence de la nouvelle intégrale) ; intégration par parties (licite seulement si le terme intégré admet des limites finies aux bornes, assure alors la convergence du nouveau terme intégral).
- Comparaison d'intégrales de fonctions positives : critère de domination, critère d'équivalence.
- Exemple d'intégrales semi-convergentes : intégrale du sinus cardinal, intégrales de Fresnel.
- Comparaisons séries/intégrales. Si f est cpm, positive, décroissante, $\sum_{n\geq a} f(n)$ et $\displaystyle\int_{[\,a\,;+\infty\,[} f$ sont de même nature.

  Plus précisément, la série $\sum_{n\geq a} f(n) - \int_n^{n+1} f$ converge. Application : $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o_{+\infty}(1)$.

  Si f est cpm, positive sur $[\,a\,;b\,[$ et si (x_n) est une suite croissante de limite b, alors $\int_{[\,a\,;b\,[} f$ est de même nature que $\sum \int_{x_n}^{x_{n+1}} f$.
- Théorème de convergence dominée.
- Théorèmes de continuité et de régularité des intégrales à paramètre.

  Exemple de la fonction Gamma d'Euler : domaine de définition, caractère $\mathcal{C}^\infty$ et expression des dérivées successives. Équivalent en 0.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$ (dem).
- Théorème de trigonalisation (énoncé).
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres (énoncé précis).
- Théorème de convergence dominée (énoncé précis).
- Théorèmes de continuité ou de régularité des intégrales à paramètre (énoncé précis).