Programme VII - semaine du 16 novembre

# Chapitre VI : Séries numériques

- Rappel des critères de convergence (comparaison de séries à termes positifs, domination, équivalence pour les séries à termes positifs). Séries de Riemann.
- Convergence et somme des séries géométriques, télescopiques. $u$ est de même nature que $\sum u_{n+1} - u_n$.
- La convergence absolue entraîne la convergence.
- Comparaison logarithmique et règle de d'Alembert.
- Comparaison série-intégrale : si $f$ est positive, décroissante, alors $\sum f(n) - \displaystyle\int_n^{n+1} f$ converge. $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
- (HP) Critère d'équivalence des sommes partielles (cas divergent) et des restes (cas convergent).
- Formule de Stirling.
- Théorème des séries alternées. Majoration des restes.
  Mise en œuvre pratique via des développements asymptotiques.
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Application à l'exponentielle complexe.

# Chapitre VII : Séries entières

- Lemme d'Abel.
- Définition du rayon de convergence $\sup\{r > 0 \,|\, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée }\}$.
  Caractérisation par la forme $\sup\{r > 0 \,|\, \sum a_n r^n \text{ converge absolument }\}$.
  Règle de d'Alembert.
- Disque ouvert de convergence. Problème du cercle d'incertitude, exemples.
- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n x^n$. Égalité lorsqu'il y a équivalence. Le rayon de convergence est inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients par un polynôme en $n$.
  Rayon de convergence d'une somme, d'un produit de Cauchy.
- Continuité de la somme d'une série entière sur son disque de convergence.
- Intégration terme à terme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.
  Conséquence : si $f$ est la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, alors $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
  Unicité des coefficients d'une série entière.
- Développements en série entière usuels : $\exp x, \cos x, \sin x, \mathrm{ch}\, x, \mathrm{sh}\, x$ sur $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1-x}, \ln(1+x), \arctan x$ sur $]-1\,;1\,[$.
  $(1+x)^\alpha$ sur $]-1\,;1\,[$ (et donc $\arcsin x$ via sa dérivée).
- Éléments d'étude au bord.

## Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si $\mathrm{A}$ et $\mathrm{B}$ sont semblables, alors toute puissance de $\mathrm{A}$ (resp. tout polynôme en $\mathrm{A}$) est semblable à la même puissance de $\mathrm{B}$ (resp. au même polynôme en $\mathrm{B}$) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).
- Si $u$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors $u$ est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- $u$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_u$ est scindé et pour toute valeur propre $\lambda$, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$ (dem).
- Théorème de trigonalisation (énoncé).
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres (énoncé précis).
- Théorème de convergence dominée (énoncé précis).
- Théorèmes de continuité ou de régularité des intégrales à paramètre (énoncé précis).
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Théorème des séries alternées. (dem)
- Lemme d'Abel (dem) et définition du rayon de convergence.
- La somme $f$ d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Expression des coefficients en fonction de $f$ (dem).
- Séries entières usuelles (au choix).