Programme VIII - semaine du 18 novembre

Chapitre VI : Séries numériques

- Rappel des critères de convergence (comparaison de séries à termes positifs, domination, équivalence pour les séries à termes positifs). Séries de Riemann.
- Convergence et somme des séries géométriques, télescopiques. u est de même nature que $\sum u_{n+1} - u_n$.
- La convergence absolue entraîne la convergence.
- Comparaison logarithmique et règle de d'Alembert.
- Comparaison série-intégrale : si f est positive, décroissante, alors $\sum f(n) - \int_n^{n+1} f$ converge. $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$.
- (HP) Critère d'équivalence des sommes partielles (cas divergent) et des restes (cas convergent).
- Formule de Stirling.
- Théorème des séries alternées. Majoration des restes.
  Mise en œuvre pratique via des développements asymptotiques.
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes. Application à l'exponentielle complexe.

Chapitre VII : Séries entières

- Lemme d'Abel.
- Définition du rayon de convergence $\sup\{r > 0 \,|\, (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\}$.
  Caractérisation par la forme $\sup\{r > 0 \,|\, \sum a_n r^n$ converge absolument $\}$.
  Règle de d'Alembert.
- Disque ouvert de convergence. Problème du cercle d'incertitude, exemples.
- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n x^n$. Égalité lorsqu'il y a équivalence. Le rayon de convergence est inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients par un polynôme en n.
  Rayon de convergence d'une somme, d'un produit de Cauchy.
- Continuité de la somme d'une série entière sur son disque de convergence.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).

- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$ (dem).
- Théorème de trigonalisation (énoncé).
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres (énoncé précis).
- Théorème de convergence dominée (énoncé précis).
- Théorèmes de continuité ou de régularité des intégrales à paramètre (énoncé précis).
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Théorème des séries alternées. (dem)
- Lemme d'Abel (dem) et définition du rayon de convergence.