Lycée J.B. Say PSI* année 2025-2026

Programme IX - semaine du 24 novembre

Chapitre VII: Séries entières

- Lemme d'Abel.
- Définition du rayon de convergence $\sup \{r > 0 \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ bornée } \}$. Caractérisation par la forme $\sup \{r > 0 \mid \sum a_n r^n \text{ converge absolument } \}$. Règle de d'Alembert.
- Disque ouvert de convergence. Problème du cercle d'incertitude, exemples.
- Si $a_n = O(b_n)$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n x^n$. Égalité lorsqu'il y a équivalence. Le rayon de convergence est inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients par un polynôme en n.
 - Rayon de convergence d'une somme, d'un produit de Cauchy.
- Continuité de la somme d'une série entière sur son disque de convergence.
- Intégration terme à terme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Conséquence : si f est la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ de rayon de convergence R non nul, alors f est de classe \mathcal{C}^{∞} sur]-R; R [, et pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Unicité des coefficients d'une série entière.

- Développements en série entière usuels : $\exp x$, $\cos x$, $\sin x$, $\cot x$, $\sin x$ sur \mathbb{R} , $\frac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $\arctan x$ sur]-1; 1 [(et donc $\arcsin x$ via sa dérivée).
- Éléments d'étude au bord.

Chapitre VIII : Vocabulaire des probabilités (cours seulement)

- Toute partie de $\mathbb N$ est finie ou dénombrable. Même résultat pour les parties d'un ensemble dénombrable. $\mathbb N^2$ est dénombrable, et donc tout produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable. $\mathbb Q$ est dénombrable. Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable. $\mathbb R$, $\mathcal P(\mathbb N)$ et $\{0,1\}^{\mathbb N}$ ne sont pas dénombrables.
- Familles sommables. Définition, théorème de sommation par paquet.

Caractérisation des familles sommables indexées par \mathbb{N} par l'absolue convergence de la série. Invariance de la somme par permutation, dans ce cas.

Théorème de Fubbini.

• Notion d'expérience aléatoire, univers (ensemble des réalisations).

Tribu des événements, espace probabilisable. Stabilité par unions finies ou dénombrables, passage au complémentaire. Et donc par intersections, finies ou dénombrables.

• Définition d'une probabilité. σ -additivité. Exemple de l'équiprobabilité dans le cas Ω fini.

Lorsque Ω est fini ou dénombrable, la probabilité d'un événement est la somme des probabilité des événements élémentaires qui le composent.

Lorsque $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, toute suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs et de somme 1 permet de définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ en posant $P(A) = \sum_{\omega_n \in A} p_n$.

• Probabilité d'une union finie : formule du crible (ou de Poincarré).

Probabilité d'une union croissante (théorème de continuité croissante). ou d'une intersection décroissante. Propriété de sous-additivité.

Lycée J.B. Say

PSI* année 2025-2026

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ , on a $m_{\lambda} = \dim E_{\lambda}(u)$ (dem).
- Théorème de trigonalisation (énoncé).
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres (énoncé précis).
- Théorème de convergence dominée (énoncé précis).
- Théorèmes de continuité ou de régularité des intégrales à paramètre (énoncé précis).
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Théorème des séries alternées. (dem)
- Lemme d'Abel (dem) et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe C^{∞} sur]-R; R [. Expression des coefficients en fonction de f (dem).
- Séries entières usuelles (au choix).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante (dem).