Programme IX - semaine du 25 novembre

Chapitre VI : Séries numériques

Tout exercice sur le sujet

Chapitre VII : Séries entières

- Lemme d'Abel.
- Définition du rayon de convergence $\sup\{r>0\,|\,(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\}$.
  Caractérisation par la forme $\sup\{r>0\,|\,\sum a_n r^n$ converge absolument $\}$.
  Règle de d'Alembert.
- Disque ouvert de convergence. Problème du cercle d'incertitude, exemples.
- Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n x^n$. Égalité lorsqu'il y a équivalence. Le rayon de convergence est inchangé lorsqu'on multiplie les coefficients par une puissance de n.
  Rayon de convergence d'une somme, d'un produit de Cauchy.
- Continuité de la somme d'une série entière sur son disque de convergence.
- Intégration terme à terme d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.
  Conséquence : si f est la somme de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence R non nul, alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$, et pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.
- Développements en série entière usuels : $\exp x, \cos x, \sin x, \operatorname{ch} x, \operatorname{sh} x$ sur $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1-x}, \ln(1+x), \arctan x$ sur $]-1\,;1\,[$.
  $(1+x)^\alpha$ sur $]-1\,;1\,[$ (et donc $\arcsin x$ via sa dérivée).
- Exemples de problèmes au bord de l'intervalle de convergence. Cas des coefficients positifs (somme convergente ou divergente), utilisation du CSSA, cas d'absolue convergence. Techniques de recherche d'équivalents.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$ (dem).

- Théorème de trigonalisation (énoncé).
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres (énoncé précis).
- Théorème de convergence dominée (énoncé précis).
- Théorèmes de continuité ou de régularité des intégrales à paramètre (énoncé précis).
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Théorème des séries alternées. (dem)
- Lemme d'Abel (dem) et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$. Expression des coefficients en fonction de f (dem).