Programme XI - semaine du 9 décembre

Chapitre VIII : Vocabulaire des probabilités

- Toute partie de $\mathbb{N}$ est finie ou dénombrable. Même résultat pour les parties d'un ensemble dénombrable. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable, et donc tout produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable. $\mathbb{Q}$ est dénombrable. Une union dénombrable d'ensembles dénombrables est encore dénombrable. $\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.
- Familles sommables. Définition, théorème de sommation par paquet.

  Caractérisation des familles sommables indexées par $\mathbb{N}$ par l'absolue convergence de la série. Invariance de la somme par permutation, dans ce cas.

  Théorème de Fubbini.
- Notion d'expérience aléatoire, univers (ensemble des réalisations).

  Tribu des événements, espace probabilisable. Stabilité par unions finies ou dénombrables, passage au complémentaire. Et donc par intersections, finies ou dénombrables.
- Définition d'une probabilité. σ-additivité. Exemple de l'équiprobabilité dans le cas Ω fini.

  Lorsque Ω est fini ou dénombrable, la probabilité d'un événement est la somme des probabilité des événements élémentaires qui le composent.

  Lorsque $\Omega = \{\omega_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable, toute suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs et de somme 1 permet de définir une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ en posant $\mathrm{P(A)} = \sum\limits_{\omega_n \in \mathrm{A}} p_n$.
- Probabilité d'une union finie : formule du crible (ou de Poincarré).

  Probabilité d'une union croissante (théorème de continuité croissante). ou d'une intersection décroissante. Propriété de sous-additivité.
- Probabilités conditionnelles (conditionnées à un événement de probabilité non nulle). Définition, c'est une probabilité.

  Formule des probabilité composées.
- Système complet d'événements (dénombrable). Formule des probabilités totales. Extension à des événements incompatibles dont l'union est presque certaine.
- Formule des probabilités des causes, formule de Bayes.
- Notion d'événements indépendants. Indépendance deux à deux et indépendance mutuelle.

Chapitre IX : Variables aléatoires discrètes (début)

- Définition. Loi de probabilité. Si X est une variable aléatoire discrète réelle, $\mathrm{P_X}$ induit une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathrm{X}(\Omega), \mathcal{P}(\mathrm{X}(\Omega)))$.

  Étant donnée une série à terme positif $\sum p_n$ de somme 1, et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeur dans $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n) = p_n$.
- Fonction de répartition : croissance, limites en $+\infty$ et $-\infty$. Expression de la loi à l'aide de la fonction de répartition.
- Exemples usuels de lois : uniforme, Bernouilli, binomiale (nombre de succès pour n expériences de type Bernouilli indépendantes), géométrique (rang du premier succès pour une suite d'expériences de type Bernouilli indépendantes, processus sans mémoire), de Poisson.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$ (dem).
- Théorème de trigonalisation (énoncé).
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres (énoncé précis).
- Théorème de convergence dominée (énoncé précis).
- Théorèmes de continuité ou de régularité des intégrales à paramètre (énoncé précis).
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Théorème des séries alternées. (dem)
- Lemme d'Abel (dem) et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Expression des coefficients en fonction de f (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante (dem).
- Loi géométrique et loi de Poisson. Définition.