

## Chapitre IX : Variables aléatoires discrètes

- Définition. Loi de probabilité. Si  $X$  est une variable aléatoire discrète réelle,  $P_X$  induit une probabilité sur l'espace probabilisable  $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ .

Étant donnée une série à terme positif  $\sum p_n$  de somme 1, et  $X$  une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  à valeur dans  $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ , il existe une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}, P(X = x_n) = p_n$ .

- Fonction de répartition : croissance, limites en  $+\infty$  et  $-\infty$ . Expression de la loi à l'aide de la fonction de répartition.
- Exemples usuels de lois : uniforme, Bernouilli, binomiale (nombre de succès pour  $n$  expériences de type Bernouilli indépendantes), géométrique (rang du premier succès pour une suite d'expériences de type Bernouilli indépendantes, processus sans mémoire), de Poisson.
- Espérance. Définition, indépendance par rapport à la numérotation des valeurs de  $X$ .  
Existence dans le cas d'une variable aléatoire finie ou bornée. Positivité de l'espérance d'une variable aléatoire positive.  
Linéarité, croissance.

Pour  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ,  $E(X)$  existe si et seulement si  $\sum P(X > n)$  converge. Si tel est le cas,  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$ .

- Espérance des lois usuelles.
- Théorème de transfert.
- Variance. Définition, formule de Koenig-Huyghens. Variances des lois usuelles.
- Série génératrice  $G_X$  d'une variable aléatoire  $X$  à valeur dans  $\mathbb{N}$ . Rayon de convergence  $\geq 1$ , continuité sur  $[-1 ; 1]$ .  
 $G_X$  est dérivable en 1 si et seulement si  $X$  est d'espérance finie, et si tel est le cas  $E(X) = G'_X(1)$ .  $X$  admet une variance si et seulement si  $G_X$  est deux fois dérivable en 1.
- Loi d'un couple, lois marginales, lois conditionnelles.  
Application au calcul de la loi du temps d'attente du  $p$ -ème succès.
- Indépendance de deux variables aléatoires. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  aussi. Si de plus  $X$  et  $Y$  admettent une variance, alors  $E(XY)$  existe et  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .  
Variance et fonction génératrice de la somme de deux variables indépendantes.
- Covariance, coefficient de corrélation linéaire.
- Indépendance mutuelle de  $n$  variables aléatoires. Variance et fonction génératrice de la somme.
- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.  
Loi faible des grands nombres.

## Chapitre X : Espaces vectoriels normés de dimension finie (début)

- Définition d'une norme.  
Exemples des normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  dans  $\mathbb{K}^n$ , dans un espace de dimension finie une fois une base fixée. Cas des espaces de matrices. Mêmes normes sur des espaces de suites. Vu en TD : norme  $\|\cdot\|_p$ .
- Exemples des normes  $\|\cdot\|_1$ ,  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathcal{C}([a ; b], \mathbb{R})$ . Normes  $\|\cdot\|_\infty$  sur l'espace  $\mathcal{B}(X, E)$  des fonctions bornées de  $X$  dans  $E$ , où  $E$  est un espace vectoriel normé.
- Propriété d'équivalence des normes en dimension finie. La notion de partie bornée ne dépend donc pas du choix de la norme.  
Contre-exemple en dimension infinie.
- Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Exemples usuels. Convexité des boules.

- Notion de suite convergente dans un espace vectoriel normé (indépendante du choix de la norme, en dimension finie). Contre-exemple en dimension quelconque. Unicité de la limite.  
Propriétés opératoires, limite d'un produit. Toute suite convergente est bornée.  
Caractérisation de suites convergentes par la convergence coordonnée par coordonnée.

## Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors toute puissance de  $A$  (resp. tout polynôme en  $A$ ) est semblable à la même puissance de  $B$  (resp. au même polynôme en  $B$ ) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).
- Si  $u$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors  $u$  est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- $u$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_u$  est scindé et pour toute valeur propre  $\lambda$ , on a  $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$  (dem).
- Théorème de trigonalisation (énoncé).
- Critère de Riemann pour les intégrales improches. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales improches (énoncé précis).
- Théorème de convergence dominée (énoncé précis).
- Théorèmes de continuité ou de régularité des intégrales à paramètre (énoncé précis).
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$  (dem).
- Théorème des séries alternées. (dem)
- Lemme d'Abel (dem) et définition du rayon de convergence.
- La somme  $f$  d'une série entière de rayon de convergence  $R$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -R ; R [$ . Expression des coefficients en fonction de  $f$  (dem).
- Séries entières usuelles (au choix).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante (dem).
- Variable aléatoire géométrique ou loi de Poisson : loi, espérance, variance.
- Pour  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ,  $E(X)$  existe si et seulement si  $\sum P(X > n)$  converge. Si tel est le cas,  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$  (dem).
- Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (dem).
- En dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à la convergence des suites de coordonnées (dem).