Programme XII - semaine du 16 décembre

Chapitre IX : Variables aléatoires discrètes

- Définition. Loi de probabilité. Si X est une variable aléatoire discrète réelle, $\mathrm{P_X}$ induit une probabilité sur l'espace probabilisable $(\mathrm{X}(\Omega), \mathcal{P}(\mathrm{X}(\Omega)))$.

  Étant donnée une série à terme positif $\sum p_n$ de somme 1, et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeur dans $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_n) = p_n$.

- Fonction de répartition : croissance, limites en $+\infty$ et $-\infty$. Expression de la loi à l'aide de la fonction de répartition.

- Exemples usuels de lois : uniforme, Bernouilli, binomiale (nombre de succès pour n expériences de type Bernouilli indépendantes), géométrique (rang du premier succès pour une suite d'expériences de type Bernouilli indépendantes, processus sans mémoire), de Poisson.

- Espérance. Définition, indépendance par rapport à la numérotation des valeurs de X.

  Existence dans le cas d'une variable aléatoire finie ou bornée. Positivité de l'espérance d'une variable aléatoire positive.

  Linéarité, croissance.

  Pour $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ existe si et seulement si $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ converge. Si tel est le cas, $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$.

- Espérance des lois usuelles.

- Théorème de transfert.

- Variance. Définition, formule de Koenig-Huyghens. Variances des lois usuelles.

- Série génératrice $\mathrm{G_X}$ d'une variable aléatoire X à valeur dans $\mathbb{N}$. Rayon de convergence ≥ 1, continuité sur $[\,-1\,;1\,]$.

  $\mathrm{G_X}$ est dérivable en 1 si et seulement si X est d'espérance finie, et si tel est le cas $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'_{\mathrm{X}}(1)$. X admet une variance si et seulement si $\mathrm{G_X}$ est deux fois dérivable en 1.

- Loi d'un couple, lois marginales, lois conditionnelles.

  Indépendance de deux variables aléatoires. Si X et Y sont indépendantes alors $f(\mathrm{X})$ et $g(\mathrm{Y})$ aussi. Si de plus X et Y admettent une variance, alors $\mathrm{E}(\mathrm{XY})$ existe et $\mathrm{E}(\mathrm{XY}) = \mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})$.

  Variance et fonction génératrice de la somme de deux variables indépendantes.

- Covariance, coefficient de corrélation linéaire.

- Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image, théorème du rang (dem).
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible (dem).
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B) (dem).
- Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe (dem).
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur (dem).

- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable et son spectre est inclus dans l'ensemble des racines du polynôme (dem).
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$ (dem).
- Théorème de trigonalisation (énoncé).
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres (énoncé précis).
- Théorème de convergence dominée (énoncé précis).
- Théorèmes de continuité ou de régularité des intégrales à paramètre (énoncé précis).
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Théorème des séries alternées. (dem)
- Lemme d'Abel (dem) et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Expression des coefficients en fonction de f (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante (dem).
- Variable aléatoire géométrique : loi, espérance, variance.
- Pour $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ existe si et seulement si $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ converge. Si tel est le cas, $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ (dem).
- G_X est dérivable en 1 si et seulement si X est d'espérance finie, et si tel est le cas $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1)$ (idée).
- Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (dem).