Programme XIII - semaine du 6 janvier

Chapitre IX : Variables aléatoires discrètes

Tout exercice sur le sujet.

Chapitre X : Espaces vectoriels normés de dimension finie (début)

- Définition d'une norme.

  Exemples des normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ dans $\mathbb{K}^n$, dans un espace de dimension finie une fois une base fixée. Cas des espaces de matrices. Mêmes normes sur des espaces de suites. Vu en TD : norme $\|.\|_p$.
- Exemples des normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([\,a\,;b\,]\,,\mathbb{R})$. Normes $\|.\|_\infty$ sur l'espace $\mathcal{B}(\mathrm{X},\mathrm{E})$ des fonctions bornées de X dans E, où E est un espace vectoriel normé.
- Propriété d'équivalence des normes en dimension finie. La notion de partie bornée ne dépend donc pas du choix de la norme.

  Contre-exemple en dimension infinie.
- Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Exemples usuels. Convexité des boules.
- Notion de suite convergente dans un espace vectoriel normé (indépendante du choix de la norme, en dimension finie). Contre-exemple en dimension quelconque. Unicité de la limite.

  Propriétés opératoires, limite d'un produit. Toute suite convergente est bornée.

  Caractérisation de suites convergentes par la convergence coordonnée par coordonnée.
- Notion d'ouvert. Une union d'ouverts est un ouvert. L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert. Contre-exemple pour l'intersection quelconque d'ouvert.

  Notion de point intérieur et d'intérieur.

  Une boule ouverte est un ouvert.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image (dem). Théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. (dem)
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B). (dem)
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. (dem)
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. (dem)
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable. (idée)
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$. (idée)
- Théorème de trigonalisation. (idée)
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence dominée.

- Théorèmes de continuité et de régularité des intégrales à paramètre.
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Critère spécial des séries alternées (dem).
- Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Expression des coefficients en fonction de f (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante.
- Variable aléatoire géométrique : loi, espérance, variance.
- Pour $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ existe si et seulement si $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ converge. Si tel est le cas, $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ (dem).
- G_X est dérivable en 1 si et seulement si X est d'espérance finie, et si tel est le cas $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1)$ (idée).
- Loi faible des grands nombres (dem).
- Une boule ouverte est un ouvert.
- En dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à la convergence des suites de coordonnées (dem).