

Programme XIV - semaine du 12 janvier

Révisions générales d'analyse de sup

Tout exercice sur la continuité, la dérivation, les accroissements finis, la convexité ou les suites récurrentes. . .

Chapitre X : Espaces vectoriels normés de dimension finie

Tout exercice sur le sujet.

En plus du programme précédent, a été vu la propriété de continuité des applications linéaires, bilinéaires, n -linéaires (sur un espace de dimension finie).

Chapitre XI : Suites et séries de fonctions (début)

- Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions. Unicité de la limite. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

$(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain rang et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- Convergence simple, uniforme ou normale d'une série de fonctions. Liens entre ces différents modes de convergence. Notion de convergence normale ou uniforme sur tout segment.

La convergence uniforme équivaut à la convergence simple plus la convergence uniforme vers 0 de la suite des restes.

Utilisation du CSSA pour des séries de la forme $\sum (-1)^n u_n(x)$.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image (dem). Théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. (dem)
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B). (dem)
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. (dem)
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. (dem)
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable. (idée)
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ , on a $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$. (idée)
- Théorème de trigonalisation. (idée)
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence dominée.
- Théorèmes de continuité et de régularité des intégrales à paramètre.
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).

- Critère spécial des séries alternées (dem).
- Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R ; R [$. Expression des coefficients en fonction de f (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante.
- Variable aléatoire géométrique : loi, espérance, variance.
- Pour $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $E(X)$ existe si et seulement si $\sum P(X > n)$ converge. Si tel est le cas, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$ (dem).
- G_X est dérivable en 1 si et seulement si X est d'espérance finie, et si tel est le cas $E(X) = G'_X(1)$ (idée).
- Loi faible des grands nombres (dem).
- Une boule ouverte est un ouvert.
- En dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à la convergence des suites de coordonnées (dem).
- L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.
- Continuité d'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie. (dem)
- La convergence normale entraîne la convergence uniforme (dem).