Programme XIV - semaine du 13 janvier

Révisions générales d'analyse de sup

Tout exercice sur la continuité, la dérivation, les accroissements finis, la convexité ou les suites récurrentes…

Chapitre X : Espaces vectoriels normés de dimension finie

- Définition d'une norme.

  Exemples des normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ dans $\mathbb{K}^n$, dans un espace de dimension finie une fois une base fixée. Cas des espaces de matrices. Mêmes normes sur des espaces de suites. Vu en TD : norme $\|.\|_p$.

- Exemples des normes $\|.\|_1, \|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$. Normes $\|.\|_\infty$ sur l'espace $\mathcal{B}(\mathrm{X}, \mathrm{E})$ des fonctions bornées de X dans E, où E est un espace vectoriel normé.

- Propriété d'équivalence des normes en dimension finie. La notion de partie bornée ne dépend donc pas du choix de la norme.

  Contre-exemple en dimension infinie.

- Boules ouvertes, boules fermées, sphères. Exemples usuels. Convexité des boules.

- Notion de suite convergente dans un espace vectoriel normé (indépendante du choix de la norme, en dimension finie). Contre-exemple en dimension quelconque. Unicité de la limite.

  Propriétés opératoires, limite d'un produit. Toute suite convergente est bornée.

  Caractérisation de suites convergentes par la convergence coordonnée par coordonnée.

- Notion d'ouvert et de fermé. Une union d'ouverts est un ouvert, une intersection de fermés est un fermé. L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert. Contre-exemple pour l'intersection quelconque d'ouvert.

  Notion de point intérieur et d'intérieur.

  Une boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. un fermé). Un sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

- Suites dominées, négligeables, équivalentes.

  Suites extraites. Héritage des caractères bornés ou convergents.

- Limite d'une fonction en un point adhérent à une partie. Définition, unicité de la limite, caractère localement borné. Propriétés opératoires usuelles. Caractérisation séquentielle.

- Continuité en un point, sur une partie. Lien avec la continuité de la restriction.

  Continuité des coordonnées, des fonctions polynomiales en les coordonnées. Opérations usuelles (sommes, produits, composées).

  Caractérisation de la continuité d'une fonction vectorielle par la continuité de ses fonctions coordonnées.

  La continuité des fonctions partielles n'entraîne pas la continuité.

  Continuité des fonctions lipschitiziennes.

- Continuité des applications linéaires et bilinéaires (sur des espaces de dimension finie). Continuité du déterminant.

- **vu lundi matin :** Continuité et topologie : l'image réciproque d'une ouvert (resp. d'un fermé) par une fonction continue est un ouvert (resp. un fermé).

  Théorème de compacité : si $f : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ est continue et si K est un fermé borné de E, f est bornée sur K et atteint ses bornes.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image (dem). Théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. (dem)
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B). (dem)
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. (dem)
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. (dem)
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable. (idée)
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$. (idée)
- Théorème de trigonalisation. (idée)
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence dominée.
- Théorèmes de continuité et de régularité des intégrales à paramètre.
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Critère spécial des séries alternées (dem).
- Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Expression des coefficients en fonction de f (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante.
- Variable aléatoire géométrique : loi, espérance, variance.
- Pour $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ existe si et seulement si $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ converge. Si tel est le cas, $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ (dem).
- G_X est dérivable en 1 si et seulement si X est d'espérance finie, et si tel est le cas $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \mathrm{G}'_\mathrm{X}(1)$ (idée).
- Loi faible des grands nombres (dem).
- Une boule ouverte est un ouvert.
- En dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à la convergence des suites de coordonnées (dem).
- Continuié d'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie (dem).