

## Chapitre X : Espaces vectoriels normés de dimension finie

Tout exercice sur le sujet

## Chapitre XI : Suites et séries de fonctions (début)

- Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions. Unicité de la limite. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.  
 $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  si et seulement si  $f_n - f$  est bornée à partir d'un certain rang et  $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- Convergence simple, uniforme ou normale d'une série de fonctions. Liens entre ces différents modes de convergence. Notion de convergence normale ou uniforme sur tout segment.  
 La convergence uniforme équivaut à la convergence simple plus la convergence uniforme vers 0 de la suite des restes.  
 Utilisation du CSSA pour des séries de la forme  $\sum (-1)^n u_n(x)$ .
- Propriétés de la limite simple : signe, monotonie, périodicité, parité.
- Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Version séries de fonctions.  
 Théorème de la double limite.

### Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image (dem). Théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. (dem)
- Si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors toute puissance de  $A$  (resp. tout polynôme en  $A$ ) est semblable à la même puissance de  $B$  (resp. au même polynôme en  $B$ ). (dem)
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. (dem)
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. (dem)
- Si  $u$  admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors  $u$  est diagonalisable. (idée)
- $u$  est diagonalisable si et seulement si  $\chi_u$  est scindé et pour toute valeur propre  $\lambda$ , on a  $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$ . (idée)
- Théorème de trigonalisation. (idée)
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence dominée.
- Théorèmes de continuité et de régularité des intégrales à paramètre.
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$  (dem).
- Critère spécial des séries alternées (dem).

- Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.
- La somme  $f$  d'une série entière de rayon de convergence  $R$  est de classe  $C^\infty$  sur  $] -R ; R [$ . Expression des coefficients en fonction de  $f$  (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probablisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante.
- Variable aléatoire géométrique : loi, espérance, variance.
- Pour  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ,  $E(X)$  existe si et seulement si  $\sum P(X > n)$  converge. Si tel est le cas,  $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$  (dem).
- Loi faible des grands nombres (dem).
- En dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à la convergence des suites de coordonnées (dem).
- L'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert.  $GL_n(\mathbb{C})$  est ouvert. (dem)
- Continuité d'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie. (dem)
- La convergence normale entraîne la convergence uniforme (dem).
- La limite uniforme d'une suite de fonctions continue est continue (dem). Théorème de la double limite (énoncé).