Programme XV - semaine du 19 janvier

Chapitre XI : Suites et séries de fonctions

- Convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions. Unicité de la limite. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

  $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f si et seulement si $f_n - f$ est bornée à partir d'un certain range et $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- Convergence simple, uniforme ou normale d'une série de fonctions. Liens entre ces différents modes de convergence. Notion de convergence normale ou uniforme sur tout segment.

  La convergence uniforme équivaut à la convergence simple plus la convergence uniforme vers 0 de la suite des restes.

  Utilisation du CSSA pour des séries de la forme $\sum(-1)^n u_n(x)$.

- Propriétés de la limite simple : signe, monotonie, périodicité, parité.
- Continuité de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues. Version séries de fonctions.

  Théorème de la double limite.

- Théorème de convergence uniforme sur un segment (permutation limite/intégrale ou série/intégrale).

  Conséquence : primitive de la limite uniforme d'une suite de fonctions. Version séries de fonctions.

- Théorème de dérivation : si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite de fonctions $\mathcal{C}^1$, converge simplement vers f et si $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (resp. sur tout segment) alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'$. Cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Version séries de fonctions.
- Théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image (dem). Théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. (dem)
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B). (dem)
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. (dem)
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. (dem)
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable. (idée)
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$. (idée)
- Théorème de trigonalisation. (idée)
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence dominée.
- Théorèmes de continuité et de régularité des intégrales à paramètre.
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).

- $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Critère spécial des séries alternées (dem).
- Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Expression des coefficients en fonction de f (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante.
- Variable aléatoire géométrique : loi, espérance, variance.
- Pour $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ existe si et seulement si $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ converge. Si tel est le cas, $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ (dem).
- Loi faible des grands nombres (dem).
- En dimension finie, la convergence d'une suite équivaut à la convergence des suites de coordonnées (dem).
- L'image réciproque d'une ouvert par une fonction continue est un ouvert. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert. (dem)
- Continuité d'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie. (dem)
- La convergence normale entraîne la convergence uniforme (dem).
- La limite uniforme d'une suite de fonctions continue est continue (dem). Théorème de la double limite (énoncé).
- Théorème d'intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (dem).
- Théorème de dérivation pour les suites et pour les séries de fonctions (énoncé).

  Théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions (énoncé).