

Programme XVI - semaine du 26 janvier

Chapitre XI : Suites et séries de fonctions

Tout exercice sur le sujet.

Chapitre XII : Espaces préhilbertiens réels (début)

- Formes bilinéaires symétriques. Définition, exemples. Représentation matricielle.
- Produit scalaire. Exemples usuels, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire. Identité du parallélogramme.
- Ensemble, sous-espaces orthogonaux. Familles orthogonales et orthonormées. Théorème de Pythagore. Lien avec la liberté.
- Orthogonal d'une partie.
- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Procédé de Gram-Schmidt.
Inégalité de Bessel.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image (dem). Théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. (dem)
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B). (dem)
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. (dem)
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. (dem)
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable. (idée)
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ , on a $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$. (idée)
- Théorème de trigonalisation. (idée)
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence dominée.
- Théorèmes de continuité et de régularité des intégrales à paramètre.
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Critère spécial des séries alternées (dem).
- Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe C^∞ sur $] -R; R[$. Expression des coefficients en fonction de f (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.

- Théorème de continuité croissante.
- Variable aléatoire géométrique : loi, espérance, variance.
- Pour $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $E(X)$ existe si et seulement si $\sum P(X > n)$ converge. Si tel est le cas, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$ (dem).
- Loi faible des grands nombres (dem).
- En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme (dem). Elle équivaut à la convergence des suites de coordonnées (idée).
- L'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert. $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert. (dem)
- Continuité d'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie. (dem)
- La convergence uniforme entraîne la convergence simple (dem).
- La limite uniforme d'une suite de fonctions continue est continue (dem). Théorème de la double limite (énoncé).
- Théorème d'intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (dem).
- Théorème de dérivation pour les suites et pour les séries de fonctions (énoncé).
- Théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions (énoncé).
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité (dem).
- Théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie (dem).