Programme XVII - semaine du 2 février

Chapitre XII : Espaces préhilbertiens réels

- Formes bilinéaires symétriques. Définition, exemples. Représentation matricielle.
- Produit scalaire. Exemples usuels, inégalité de Cauchy-Schwarz, inégalité triangulaire. Identité du parallélogramme.
- Ensemble, sous-espaces orthogonaux. Familles orthogonales et orthonormées. Théorème de Pythagore. Lien avec la liberté.
- Orthogonal. Supplémentaire orthogonal. Unicité, problème de l'existence (contre-exemples en dimension infinie).
- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Procédé de Gram-Schmidt.

  Inégalité de Bessel.
- Espaces euclidiens : existence de bases orthonormées, complétion d'une famille orthonormée (base orthonormée incomplète).

  Existence d'un supplémentaire orthogonal.

  Expression des coordonnées dans une base orthonormée. Calcul de produits scalaires et de normes.

  Représentation des formes linéaires à l'aide d'un produit scalaire. Équation cartésienne d'un hyperplan, vecteur normal.

  Expression de la matrice d'une famille de vecteurs dans une base orthonormée. Matrice de Gram. Matrice de passage entre bases orthonormée.

Chapitre XIII : Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens (début)

- Isométries vectorielles. Définitions (conservation de la norme ou du produit scaiaire). Caractérisation par l'image d'une base orthonormée. Exemple des symétries orthogonales.

  Décomposition en produit de réflexions.
- Matrices orthogonales. Définition, caractérisation à l'aide de la famille des lignes ou des colonnes. Lien avec les isométries vectorielles. Les matrices de passage entre bases orthonormées sont orthogonales.
- Orientation d'un espace euclidien. Bases orthonormées directes et indirectes. Notion de produit mixte.
- Caractérisation des matrices orthogonales de taille 2.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image (dem). Théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. (dem)
- Si A et B sont semblables, alors toute puissance de A (resp. tout polynôme en A) est semblable à la même puissance de B (resp. au même polynôme en B). (dem)
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. (dem)
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. (dem)
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable. (idée)
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$. (idée)
- Théorème de trigonalisation. (idée)

- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence dominée.
- Théorèmes de continuité et de régularité des intégrales à paramètre.
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Critère spécial des séries alternées (dem).
- Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}\,[$. Expression des coefficients en fonction de f (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante.
- Variable aléatoire géométrique : loi, espérance, variance.
- Pour $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ existe si et seulement si $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ converge. Si tel est le cas, $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ (dem).
- Loi faible des grands nombres (dem).
- En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme (dem). Elle équivaut à la convergence des suites de coordonnées (idée).
- L'image réciproque d'une ouvert par une fonction continue est un ouvert. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert. (dem)
- Continuité d'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie. (dem)
- La convergence uniforme entraîne la convergence simple (dem).
- La limite uniforme d'une suite de fonctions continue est continue (dem). Théorème de la double limite (énoncé).
- Théorème d'intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (dem).
- Théorème de dérivation pour les suites et pour les séries de fonctions (énoncé).
- Théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions (énoncé).
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité (dem).
- Théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie (dem).