Programme XVIII - semaine du 10 février

# Chapitre XII : Espaces préhilbertiens réels

Tout exercice sur le sujet

# Chapitre XIII : Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

- Isométries vectorielles. Définitions (conservation de la norme ou du produit scaiaire). Caractérisation par l'image d'une base orthonormée. Exemple des symétries orthogonales. Contre-exemple des projecteurs orthogonaux.

  Décomposition en produit de réflexions.

- Matrices orthogonales. Définition, caractérisation à l'aide de la famille des lignes ou des colonnes. Lien avec les isométries vectorielles. Les matrices de passage entre bases orthonormées sont orthogonales.

  Les matrices orthogonales symétriques sont les matrices de symétries orthogonales.

- Orientation d'un espace euclidien. Bases orthonormées directes et indirectes. Notion de produit mixte.

- Automorphismes orthogonaux en dimension 2 : les automorphismes orthogonaux directs sont les rotations et $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^2)$ est commutatif. Les automorphismes orthogonaux indirects sont les réflexions.

- Produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

- Automorphismes orthogonaux en dimension 3 : tous admettent une valeur propre réelle, égale à $1$ ou $-1$.

  Tout élément de $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$ admet $1$ pour valeur propre. Conséquence : les éléments de $\mathcal{SO}(\mathbb{R}^3)$ sont les rotations. Caractérisation par l'axe et l'angle. Calcul pratique de l'axe, de l'angle. Utilisation de la trace. Détermination du signe du sinus via un produit mixte. Expression analytique.

  Les éléments indirects de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ sont les réflexions (qui ont $1$ comme valeur propre, dont la matrice est symétrique) et les composées commutatives d'une rotation et de la réflexion par rapport au plan orthogonal à l'axe de la rotation (qui n'ont pas $1$ pour valeur propre, dont la matrice n'est pas symétrique).

- Endomorphismes symétriques. Définition, caractérisation matricielle. Si $\mathrm{F}$ est stable par $u$ symétrique, alors $\mathrm{F}^{\perp}$ également.

  Théorème spectral : tout endomorphisme auto-adjoint est diagonalisable, dans une base orthonormée.

  Interprétation matricielle : toute matrice symétrique réelle est orthogonalement diagonalisable.

  Interprétation bilinéaire. Toute forme bilinéaire symétrique admet, dans une base orthonormée bien choisie, une matrice diagonale.

## Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image (dem). Théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Sommes directes, caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul (dem). Caractérisation en dimension finie.
- Toute matrice inversible à gauche (resp. à droite) est inversible. (dem)
- Si $\mathrm{A}$ et $\mathrm{B}$ sont semblables, alors toute puissance de $\mathrm{A}$ (resp. tout polynôme en $\mathrm{A}$) est semblable à la même puissance de $\mathrm{B}$ (resp. au même polynôme en $\mathrm{B}$). (dem)
- Déterminant de Vandermonde.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. (dem)
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. (dem)
- Si $u$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors $u$ est diagonalisable. (idée)

- $u$ est diagonalisable si et seulement si $\chi_u$ est scindé et pour toute valeur propre $\lambda$, on a $m_\lambda = \dim \mathrm{E}_\lambda(u)$. (idée)
- Théorème de trigonalisation. (idée)
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence dominée.
- Théorèmes de continuité et de régularité des intégrales à paramètre.
- La convergence absolue d'une série numérique entraîne sa convergence (dem).
- $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Critère spécial des séries alternées (dem).
- Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.
- La somme $f$ d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{R}\,;\mathrm{R}[$. Expression des coefficients en fonction de $f$ (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante.
- Variable aléatoire géométrique : loi, espérance, variance.
- Pour $\mathrm{X}(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ existe si et seulement si $\sum \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ converge. Si tel est le cas, $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(\mathrm{X} > n)$ (dem).
- Loi faible des grands nombres (dem).
- En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme (dem). Elle équivaut à la convergence des suites de coordonnées (idée).
- L'image réciproque d'une ouvert par une fonction continue est un ouvert. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert. (dem)
- Continuité d'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie. (dem)
- La convergence uniforme entraîne la convergence simple (dem).
- La limite uniforme d'une suite de fonctions continue est continue (dem). Théorème de la double limite (énoncé).
- Théorème d'intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (dem).
- Théorème de dérivation pour les suites et pour les séries de fonctions (énoncé).
- Théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions (énoncé).
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité (dem).
- Théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie (dem), existence du supplémentaire orthogonal.
- Tout élément de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ admet $1$ pour valeur propre (dem). Les élément de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$ sont les rotations.
- Théorème spectral (énoncé linéaire et matriciel).