

Chapitre XIV : Calcul différentiel

- Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles d'une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Opérations usuelles.
Fonction différentiable en un point. Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et admet en a des dérivées partielles.
Et $df_a = \sum_{k=1}^n \partial_k f(a) dx_k$.
- Définition d'une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Si f est de classe \mathcal{C}^1 alors f est différentiable en tout point.
- Règle de la chaîne :
Dérivée d'une composée de la forme $h = g(f_1, \dots, f_q)$, avec $g : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $f_1, \dots, f_q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables.
 $h'(t) = \sum_{k=1}^q f'_k(t) \partial_k g(f_1(t), \dots, f_q(t))$.
Dérivées partielles d'une fonction de la forme $g(f_1, f_2)$ avec f_1, f_2 et $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Cas particulier des coordonnées polaires.
Plus généralement, les dérivées partielles de $h = g(f_1, \dots, f_q)$ sont les $\partial_i h = \sum_{j=1}^p \partial_i f_j \partial g_j(f_1, \dots, f_q)$.
Application aux changements de variable dans une équation aux dérivées partielles. Exemple des coordonnées polaires.
- Gradient, inégalité des accroissements finis.
- Recherche d'extrema. Rappel du théorème de compacité.
Si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ admet en a , point intérieur à \mathcal{U} , un extremum local, alors a est un point critique de f .
- Exemples de calcul de DL à l'ordre 2 en un point critique pour déterminer si s'est un maximum, un minimum, un point selle (ou rien de tout cela...)
- Dérivées partielles d'ordre supérieur. Théorème de Schwarz.
Condition nécessaire sur les dérivées partielles d'ordre 2 : les valeurs propres de la matrice hessienne $(\partial_i \partial_j f(a))_{1 \leq i, j \leq p}$ sont négatives (resp. positives) lorsque f a un maximum (resp. un minimum) local en a .
Condition suffisante : si les valeurs propres de la matrice hessienne $(\partial_i \partial_j f(a))_{1 \leq i, j \leq p}$ sont toutes strictement négatives (resp. positives) alors f a un maximum (resp. un minimum) local strict en a .
- Exemples de recherche d'extrema sous contrainte.
- Équation de la tangente à une courbe d'équation $f(x, y) = 0$ en un point régulier. Équation du plan tangent à une surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ en un point régulier.

Questions de cours

- Théorème d'isomorphisme d'un supplémentaire du noyau sur l'image (dem). Théorème du rang.
- Expression des polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Les sous-espaces propres sont en somme directe. (dem)
- Le spectre est inclus dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur. (dem)
- Si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples alors u est diagonalisable. (idée)
- u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé et pour toute valeur propre λ , on a $m_\lambda = \dim E_\lambda(u)$. (idée)
- Théorème de trigonalisation. (idée)
- Critère de Riemann pour les intégrales impropres. (dem)
- Théorème de changement de variable pour les intégrales impropres.
- Théorème de convergence dominée.

- Théorèmes de continuité et de régularité des intégrales à paramètre.
- $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$ (dem).
- Critère spécial des séries alternées (dem).
- Lemme d'Abel et définition du rayon de convergence.
- La somme f d'une série entière de rayon de convergence R est de classe C^∞ sur $] -R ; R [$. Expression des coefficients en fonction de f (dem).
- Définition d'une tribu, d'un espace probabilisable et d'une probabilité.
- Théorème de continuité croissante.
- Pour $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, $E(X)$ existe si et seulement si $\sum P(X > n)$ converge. Si tel est le cas, $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n)$ (dem).
- G_X est dérivable en 1 si et seulement si X est d'espérance finie, et si tel est le cas $E(X) = G'_X(1)$ (idée).
- Loi faible des grands nombres (dem).
- En dimension finie, la convergence d'une suite ne dépend pas de la norme (dem). Elle équivaut à la convergence des suites de coordonnées (idée).
- L'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue est un ouvert. $GL_n(\mathbb{C})$ est ouvert. (dem)
- Continuité d'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie. (dem)
- La convergence uniforme entraîne la convergence simple (dem).
- La limite uniforme d'une suite de fonctions continue est continue (dem). Théorème de la double limite (énoncé).
- Théorème d'intégration sur un segment de la limite uniforme d'une suite de fonctions continues (dem).
- Théorème de dérivation pour les suites et pour les séries de fonctions (énoncé).
- Théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions (énoncé).
- Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité (dem).
- Théorème de projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie (dem), existence du supplémentaire orthogonal.
- Tout élément de $SO(\mathbb{R}^3)$ admet 1 pour valeur propre (dem). Les éléments de $SO(\mathbb{R}^3)$ sont les rotations.
- Théorème spectral (énoncé).
- Règle de la chaîne.