Devoir à la maison n° 1 - pour le 12 septembre 2025

Matrices de trace nulle

Question préliminaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Partie I. Exemple de la dimension 3

Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice. On suppose A de trace nulle, non nulle.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Justifier qu'il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{A} = \lambda \mathrm{I}_3$, et en déduire que f n'est pas une homothétie.
2. Montrer alors qu'il existe une base $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et $(\alpha, \beta, a, b, c, d) \in \mathbb{R}^6$ tels que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}$ est
$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$
3. On note pour la suite $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\epsilon_2, \epsilon_3)$, et p la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}\,(\epsilon_1)$; enfin $g = p \circ f_{|\mathrm{F}}$.
   (a) Justifier que g est un endomorphisme de F, et vérifier que sa matrice représentative dans la base (ϵ_2, ϵ_3) est $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
   (b) Justifier que $a + d = 0$.
   (c) Si $(a, d) \neq (0, 0)$, montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (\delta_2, \delta_3)$ de F et $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ tels que la matrice représentative de g dans la base $\mathcal{B}'$ est $\begin{pmatrix} 0 & s \\ 1 & t \end{pmatrix}$.
   [On pourra imiter la démarche des questions 1. et 2.]
   (d) Vérifier que $t = 0$.
4. (a) Vérifier que $\mathcal{B}'' = (\epsilon_1, \delta_2, \delta_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Montrer qu'il existe $(u, v, x, y) \in \mathbb{R}^4$ tel que la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}''$ est $\begin{pmatrix} 0 & u & v \\ x & 0 & s \\ y & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Ici $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ désigne toujours l'endomorphisme canoniquement associé.
   Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ a tous ses termes diagonaux nuls.

Partie II. Cas général

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Soient $\mathrm{A}, \mathrm{P} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \times \cdots \times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ \times & \end{array}\right)$, et $\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} \mu & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{Q} \\ 0 & \end{array}\right)$ diagonale par blocs.
   (a) Quelle est la forme du produit AP ? Quelle est la forme du produit PA ?
   (b) Justifier que P est inversible si et seulement si $\mu \neq 0$ et Q inversible. Déterminer alors P^{-1}.

2. Soient $\mathrm{B}' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ une matrice semblable à B, dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda & \times\cdots\times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{B}' \\ \times & \end{array}\right)$$

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle de trace nulle et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

   (a) Montrer que u n'est pas une homothétie, puis qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que la première colonne de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

   (b) En déduire que A est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \times\cdots\times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ \times & \end{array}\right)$. Que vaut $\mathrm{Tr(B)}$?

4. À l'aide des question précédente, montrer que si $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice de trace nulle, alors A est semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls.

   [On pourra raisonner par récurrence sur n.]

Partie III. Matrices crochets de Lie

On fixe un entier $n \geq 2$.

On note Γ l'ensemble de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on peut écrire sous la forme $\mathrm{XY} - \mathrm{YX}$, où $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $d_1, \ldots, d_n$ des réels distincts et $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}(d_1, \ldots, d_n)$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $d_1, \ldots, d_n$.

   (a) Justifier que l'application $\varphi\,:\,\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{MD} - \mathrm{DM}$ est linéaire.

   (b) Pour $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer le terme général de la matrice $\mathrm{MD} - \mathrm{DM}$.

   (c) Montrer alors que $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est l'ensemble des matrices diagonales.

   (d) En déduire que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est l'ensemble des matrices dont tous les termes diagonaux sont nuls.

2. Montrer que toute matrice semblable à une matrice de Γ est encore dans Γ. Conclure que toute matrice de trace nulle est dans l'ensemble Γ.

3. Justifier que toute matrice de Γ est de trace nulle. Conclure en décrivant Γ.