Devoir à la maison n° 2 - pour le 19 septembre 2025

Dans tout le texte, $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des réels, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus n.

Pour $a < b$ dans $\mathbb{Z}$, on note $[\![\, a\,;\, b\,]\!]$ l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{Z}$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note P_k le polynôme X^{k-1}. On rappelle que $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ dont la famille $(\mathrm{P}_k)_{k\in[\![1\,;\, n+1]\!]}$ est une base. Pour $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on note $\deg(\mathrm{P})$ le degré de P et, lorsque P est non nul, $\mathrm{cd}(\mathrm{P})$ désigne le coefficient dominant de P, c'est-à-dire le coefficient du monôme $\mathrm{X}^{\deg(\mathrm{P})}$.

Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![\, 0\,;\, k\,]\!]$, le coefficient binomial $\dbinom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

Pour un ensemble E et $f\ :\ \mathrm{E} \to \mathrm{E}$, on définit l'application $f^k\ :\ \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E} \text{ et } f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si f est bijective, on note f^{-1} la réciproque de f et pour $k \in \mathbb{N}$, on note $f^{-k} = (f^{-1})^k$.

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille p.

1 L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

1.1 L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme τ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ donné par :

$$\tau\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \to & \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P}(\mathrm{X}) & \mapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) \end{array}$$

1. Pour un polynôme non nul $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, exprimer $\deg(\tau(\mathrm{P}))$ et $\mathrm{cd}(\tau(\mathrm{P}))$ à l'aide de $\deg(\mathrm{P})$ et $\mathrm{cd}(\mathrm{P})$.
2. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de $\tau^k(\mathrm{P})$ en fonction de P.
3. Donner la matrice $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ de τ dans la base $(\mathrm{P}_k)_{k\in[\![1\,;\, n+1]\!]}$. On exprimera les coefficients $\mathrm{M}_{i,j}$ en fonction de i et j.
4. **[5/2]** Préciser l'ensemble des valeurs propres de τ. L'application τ est-elle diagonalisable ?
5. L'application τ est-elle bijective ? Si oui, préciser τ^{-1}. L'expression de τ^j trouvée à la question 2 pour $j \in \mathbb{N}$ est-elle valable pour $j \in \mathbb{Z}$?
6. Que vaut M^{-1} ? Exprimer les coefficients $(\mathrm{M}^{-1})_{i,j}$ en fonction de i et j.
7. On se donne une suite réelle $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et on définit, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j \tag{1}$$

Déterminer une matrice $\mathrm{Q} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \mathrm{Q} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

8. En déduire la formule d'inversion : pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$u_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{2}$$

9. On considère un réel λ et la suite $(u_k = \lambda^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Quelle est la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la formule (1) ? Vérifier alors la formule (2).

1.2 L'opérateur de différence

L'opérateur de différence est l'endomorphisme δ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$:

$$\begin{array}{rccl} \delta : & \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] & \rightarrow & \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \\ & \mathrm{P}(\mathrm{X}) & \mapsto & \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X}) \end{array}$$

1. Pour un polynôme non constant $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, exprimer $\deg(\delta(\mathrm{P}))$ et $\mathrm{cd}(\delta(\mathrm{P}))$ à l'aide de $\deg(\mathrm{P})$ et $\mathrm{cd}(\mathrm{P})$.
2. En déduire le noyau $\ker(\delta)$ et $\mathrm{Im}(\delta)$ de l'endomorphisme δ.
3. Plus généralement, pour $j \in [\![1 \,;\, n]\!]$, montrer les égalités suivantes :
$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[\mathrm{X}] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[\mathrm{X}] \tag{3}$$
4. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, exprimer $\delta^k(\mathrm{P})$ en fonction des $\tau^j(\mathrm{P})$ pour $j \in [\![0 \,;\, k]\!]$.
5. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Montrer que :
$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \mathrm{P}(j) = 0 \tag{4}$$
6. Dans cette question, on veut montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire $u : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \rightarrow \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ telle que $u \circ u = \delta$. On suppose, par l'absurde, qu'une telle application u existe.
   (a) Montrer que u et δ^2 commutent.
   (b) En déduire que $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ est stable par l'application u.
   (c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :
   $$\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
   (d) Conclure.
7. Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ stables par l'application δ.
   (a) Pour P polynôme non nul de degré $d \leqslant n$, montrer que la famille $(\mathrm{P}, \delta(\mathrm{P}), \ldots, \delta^d(\mathrm{P}))$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?
   (b) En déduire que si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0 \,;\, n]\!]$ tel que $\mathrm{V} = \mathbb{R}_d[\mathrm{X}]$.

2 Applications en combinatoire

Pour tout couple (p, k) d'entiers naturels non nuls, on note $\mathrm{S}(p, k)$ le nombre de surjections de $[\![1 \,;\, p]\!]$ dans $[\![1 \,;\, k]\!]$. De façon cohérente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{S}(p, 0) = 0$.

2.1 Quelques cas particuliers

1. Que vaut $\mathrm{S}(p, n)$ pour $p < n$?
2. Déterminer $\mathrm{S}(n, n)$.
3. Déterminer $\mathrm{S}(n+1, n)$.

2.2 Recherche d'une expression générale

1. Combien y a-t-il d'applications de $[\![1 \,;\, p]\!]$ dans $[\![1 \,;\, n]\!]$?
2. Pour $p \geqslant n$, établir la formule
$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{S}(p, k) \tag{5}$$
   où $\mathrm{S}(p, 0) = 0$ par convention.
3. En déduire une expression de $\mathrm{S}(p, n)$ pour $p \geqslant n$.
4. En relisant la question 5 de la partie 1.2, commenter la cohérence de cette expression pour $p < n$.

2.3

1. Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1}$$

3 Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} \mathrm{H}_0 = 1 \\ \mathrm{H}_k = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(\mathrm{X}-j) \quad \text{pour } k \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!] \end{cases}$$

3.1 Généralités

1. Montrer que la famille $(\mathrm{H}_k)_{k\in[\![\, 0\,;\, n\,]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Calculer $\delta(\mathrm{H}_0)$ et, pour $k \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$, exprimer $\delta(\mathrm{H}_k)$ à l'aide de H_{k-1}.
3. La matrice M définie à la question 3 de la partie 1.1 et la matrice M' de taille $n+1$ donnée par

$$\mathrm{M}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   sont-elles semblables ?
4. Montrer que, pour $k, l \in [\![\, 0\,;\, n\,]\!]$,

$$\delta^k(\mathrm{H}_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

5. Montrer que, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$,

$$\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n}(\delta^k(\mathrm{P}))(0)\mathrm{H}_k$$

3.2 Étude d'un exemple

1. Donner les coordonnées du polynômes $\mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 7$ dans la base $(\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2, \mathrm{H}_3)$ de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.
2. En déduire un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$ tel que

$$\delta^2(\mathrm{P}) = \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 7$$

3. Déterminer les suites réelles $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7 \qquad (k \in \mathbb{N})$$

3.3 Polynômes à valeurs entières

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\mathrm{H}_n(k)$. On distinguera trois cas : $k \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!]$, $k \geqslant n$ et $k < 0$. Pour ce dernier cas, on posera $k = -p$.
2. En déduire que $\mathrm{H}_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, c'est-à-dire que H_n est à valeurs entières sur les entiers.
3. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ à valeurs entières sur les entiers. Montrer que $\delta(\mathrm{P})$ est aussi à valeurs entières sur les entiers.

4. Montrer que $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base $(\mathrm{H}_k)_{k\in[\![\,0\,;\,n\,]\!]}$ sont entières.

5. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ de degré $d \in \mathbb{N}$. Montrer que si P est à valeurs entières sur les entiers alors $d!\,\mathrm{P}$ est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

4 Généralisation de l'opérateur de différence et application

Pour une application $f\ :\ \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, on définit l'application

$$\delta(f)\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x+1)-f(x) \end{array}$$

4.1

1. Montrer que $\delta(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comparer $(\delta(f))'$ et $\delta(f')$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, exprimer $(\delta^n(f))(x)$ à l'aide des coefficients binomiaux $\binom{n}{j}$ et des $f(x+j)$ (où l'indice j appartient à $[\![\,0\,;\,n\,]\!]$).

3. Expliquer pourquoi, pour tout $x > 0$, il existe un $y_1 \in]0,1[$ tel que

$$(\delta(f))(x) = f'(x+y_1)$$

4. En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un $y_n \in]0,n[$ tel que

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n) \tag{6}$$

On pourra procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ et utiliser les trois questions précédentes.

4.2

On considère dans toute la suite de cette partie un réel α. On suppose que pour tout nombre p premier, p^α est un entier naturel. On se propose de montrer que α est alors un entier naturel.

1. Montrer que pour tout entier k strictement positif, k^α appartient à $\mathbb{N}^*$.

2. Montrer que α est positif ou nul.

3. On considère l'application f_α définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_\alpha(x) = x^\alpha$. Montrer que α est un entier naturel si et seulement si l'une des dérivées successives de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.

4.3

On applique la relation (6) à la fonction f_α et à l'entier $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière). On choisit désormais $x \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'expression

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f_\alpha(x+j)$$

est un entier relatif.

2. Les notations sont celles de la question 4 de la partie 4.1. Quelle est la limite de l'expression $f_\alpha^{(n)}(x+y_n)$ quand $x \in \mathbb{N}^*$ tend vers $+\infty$?

3. Conclure.