Devoir à la maison n° 1 - éléments de correction

Question préliminaire

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que, pour tout $x \in \mathrm{E}$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

Soient x et y deux vecteurs non nuls de E. Il existe alors deux réels λ_x et λ_y tels que $f(x) = \lambda_x \cdot x$ et $f(y) = \lambda_y \cdot y$ respectivement. De deux choses l'une :

- Soit la famille (x, y) est liée c'est-à-dire, puisque $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, qu'il existe un réel α tel que $y = \alpha \cdot x$.

  Alors $\lambda_y \cdot y = f(y) = f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x) = \alpha \cdot (\lambda_x \cdot x) = \lambda_x \cdot (\alpha \cdot x) = \lambda_x \cdot y$. Comme de plus $y \neq 0_{\mathrm{E}}$, on a alors nécessairement $\lambda_x = \lambda_y$.

- Soit la famille (x, y) est libre. On a alors $f(x+y)$ de la forme $\lambda_{x+y} \cdot (x+y)$ mais aussi, par linéarité, $f(x+y) = f(x) + f(y) = \lambda_x \cdot x + \lambda_y \cdot y$. Il vient $(\lambda_{x+y} - \lambda_x) \cdot x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y) \cdot y = 0_{\mathrm{E}}$ donc, la famille étant libre, $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$.

Dans tous les cas, les réels λ_x et λ_y sont égaux, en d'autre termes il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ (indépendant de x) tel que pour tout $x \in \mathrm{E} \backslash \{0_{\mathrm{E}}\}$, on a $f(x) = \lambda \cdot x$. Cette relation reste valable pour $x = 0_{\mathrm{E}}$ puisque f est linéaire, au total $\boxed{f \text{ est une homothétie,}}$ *i.e.* de la forme $\lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Partie I. Exemple de la dimension 3

1. Si A est de la forme $\lambda \mathrm{I}_3$, alors $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 3\lambda$. L'hypothèse $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 0$ donne alors $\lambda = 0$ soit $\mathrm{A} = 0$, ce qui n'est pas.

   On en déduit que $\boxed{f \text{ n'est pas une homothétie,}}$ en effet la matrice de l'homothétie $\lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ (quelle que soit la base de $\mathbb{R}^3$ choisie) est précisément $\lambda \mathrm{I}_3$.

2. f n'étant pas une homothétie, on peut trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille $(x, f(x))$ est libre, d'après la question préliminaire (contraposée). On pose alors $\epsilon_1 = x$ et $\epsilon_2 = f(x)$ et l'on complète cette famille libre en une base $\mathcal{B} = (\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

   Par construction $f(\epsilon_1) = \epsilon_2$, autrement dit les coordonnées de $f(\epsilon_1)$ dans $\mathcal{B}$ sont $(0, 1, 0)$. Si l'on note (α, a, c) les coordonnées de $f(\epsilon_2)$ dans $\mathcal{B}$ et (β, b, d) celle de $f(\epsilon_3)$, on a bien $\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}}$.

3. (a) g est bien définie sur F puisque la restriction $p_{|\mathrm{F}}$ l'est, à valeur dans F puisque p est à valeur dans F, et g est linéaire en tant que composée d'applications linéaires.
   On a $f(\epsilon_2) = \alpha\epsilon_1 + a\epsilon_2 + c\epsilon_3$ donc $g(\epsilon_2) = p(\alpha\epsilon_1 + a\epsilon_2 + c\epsilon_3) = a\epsilon_2 + c\epsilon_3$. De même $f(\epsilon_3) = \beta\epsilon_1 + b\epsilon_2 + d\epsilon_3$ donc $g(\epsilon_3) = p(\beta\epsilon_1 + b\epsilon_2 + d\epsilon_3) = b\epsilon_2 + d\epsilon_3$. La matrice de g dans la base (ϵ_2, ϵ_3) de F est donc bien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

   (b) Bien entendu $a + d$ n'est autre que la trace de la matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, qui est égale à la trace de A, c'est-à-dire que l'on a $\boxed{a + d = 0}$ (si P désigne la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a en effet $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et donc $\mathrm{Tr}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{PP}^{-1}\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{A})\ldots$)

   (c) Si $(a, d) \neq (0, 0)$, alors g n'est pas une homothétie (sinon sa matrice serait de la forme $\lambda \mathrm{I}_2$, or elle serait alors de trace nulle donc $\lambda = 0$ et finalement on aurait $(a, d) = (0, 0)$). On peut donc trouver un vecteur δ_2 tel que $(\delta_2, g(\delta_2))$ est libre. Si l'on pose $\delta_3 = g(\delta_2)$, on a bien une famille libre de cardinal 2 de F, donc une base, dans laquelle la matrice de g est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & s \\ 1 & t \end{pmatrix}$.

   (d) Comme la trace de la matrice de g est indépendante du choix de la base, on a $a + d = 0 + t$ donc $\boxed{t = 0.}$

4. (a) On sait que (δ_2, δ_3) est une base de $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\epsilon_2, \epsilon_3)$. Comme $\mathcal{B}$ est une base, on a d'autre part $\mathrm{Vect}\,(\epsilon_1)$ et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\epsilon_2, \epsilon_3)$ supplémentaires, ce qui s'écrit aussi $\mathrm{Vect}\,(\epsilon_1)$ et $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\delta_2, \delta_3)$ supplémentaires, d'où le fait que $\boxed{\mathcal{B}'' = (\epsilon_1, \delta_2, \delta_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$

(b) On a premièrement $f(\epsilon_1) = \epsilon_2 \in \mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,(\delta_2, \delta_3)$ donc de la forme $x\delta_2 + y\delta_3$.
Ensuite $g(\delta_2) = \delta_3 = p(f(\delta_2))$ donc $f(\delta_2) = p(f(\delta_2)) + f(\delta_2) - p(f(\delta_2))$ est de la forme $\delta_3 + u\epsilon_1$ avec $u \in \mathbb{R}$, en effet $f(\delta_2) - p(f(\delta_2)) \in \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Vect}\,(\epsilon_1)$.
Enfin $g(\delta_3) = s\delta_2$ donc de la même façon $f(\delta_3)$ est de la forme $s\delta_2 + v\epsilon_1$ avec $v \in \mathbb{R}$.
On obtient alors $\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 0 & u & v \\ x & 0 & s \\ y & 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

N.B. Si $(a, d) = (0, 0)$ le résultat est encore valable avec $\delta_2 = \epsilon_2$ et $\delta_3 = \epsilon_3$.

5. Ici $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ désigne toujours l'endomorphisme canoniquement associé.

On peut prendre $\varepsilon_1 = (1, 0, 0)$ et $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1) = (2, 0, 1)$ pour commencer. On peut compléter au hasard en une base et appliquer l'intégralité de la démarche précédente, ou bien remarquer que $\varepsilon_3 = f(\varepsilon_2) = (4, 1, 1)$ est bien tel que $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, en effet $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc la famille est libre, à 3 éléments.

Et l'on a pour finir $f(\varepsilon_3) = (7, 0, 3) = (1, 0, 0) + 3 \cdot (2, 0, 1) = \varepsilon_1 + 3\varepsilon_2$, d'où la matrice $\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$ dont tous les termes diagonaux sont nuls.

Partie II. Cas général

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. (a) Les produits par blocs AP et PA donnent $\mathrm{AP} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda\mu & \times \cdots \times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{BQ} \\ \times & \end{array}\right)$ et $\mathrm{PA} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda\mu & \times \cdots \times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{QB} \\ \times & \end{array}\right)$.

   (b) Si P est inversible alors bien sûr sa première colonne est non nulle donc $\mu \neq 0$, et ses $n - 1$ dernières colonnes sont linéairement indépendantes, donc les $n - 1$ colonnes de Q également, ce qui signifie que Q est inversible.

   Réciproquement, si $\mu \neq 0$ et si Q est inversible, alors on vérifie sans peine que la matrice $\mathrm{P}_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1/\mu & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{Q}^{-1} \\ 0 & \end{array}\right)$

   vérifie $\mathrm{P}_1\mathrm{P} = \mathrm{I}_n = \mathrm{P}\mathrm{P}_1$ donc P est inversible et $\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1/\mu & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{Q}^{-1} \\ 0 & \end{array}\right)$

2. Soient $\mathrm{B}' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ une matrice semblable à B, dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ} = \mathrm{B}'$. Posant $\mathrm{P} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{Q} \\ 0 & \end{array}\right)$ d'inverse $\mathrm{P}^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \ldots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & \mathrm{Q} \\ 0 & \end{array}\right)$, on a $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \times \cdots \times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{BQ} \\ \times & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & \times \cdots \times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{B}' \\ \times & \end{array}\right)$.

3. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice non nulle de trace nulle et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

   (a) Comme dans la première partie, si u est une homothétie de rapport λ alors $\mathrm{A} = \lambda\mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{Tr(A)} = n\lambda$. Comme $\mathrm{Tr(A)} = 0$, ceci impose $\lambda = 0$ soit $\mathrm{A} = 0$, ce qui n'est pas.
   Donc u n'est pas une homothétie, on peut donc trouver $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(x, u(x))$ est libre, et l'on complète alors cette famille en une base $\boxed{\mathcal{B} = (x, u(x), e_3, \ldots, e_n)\text{, qui répond à la question.}}$

(b) Si P désigne la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, on a alors $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$, de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \times\cdots\times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ \times & \end{array}\right)$, avec $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$, autrement dit A est semblable à une matrice de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \times\cdots\times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ \times & \end{array}\right)$.

Comme la trace est invariante par changement de base, on a alors $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{B})$ donc $\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{B}) = 0.}$

4. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété "toute matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls".

- $\mathcal{P}(1)$ est une trivialité, en effet une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ de trace nulle est nulle... On a d'ailleurs établi la propriété $\mathcal{P}(3)$ dans la première partie.
- Soit $n \geq 2$, supposons $\mathcal{P}(n-1)$. Soit alors $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle.

  D'après la question 3.(b), A est semblable à une matrice A_1 de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \times\cdots\times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{B} \\ \times & \end{array}\right)$, avec $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ de trace nulle. Et $\mathcal{P}(n-1)$ donne B est semblable (dans $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$) à une matrice B' dont tous les termes diagonaux sont nuls.

  Enfin d'après la question 2, la matrice A_1 est alors semblable à une matrice A_2 de la forme $\left(\begin{array}{c|c} 0 & \times\cdots\times \\ \hline \times & \\ \vdots & \mathrm{B}' \\ \times & \end{array}\right)$, dont tous les termes diagonaux sont nuls. A étant semblable à A_1 qui est semblable à A_2, on a par transitivité A semblable à la matrice A_2 dont tous les termes diagonaux sont nuls.

On conclut par récurrence que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Toute matrice de trace nulle est semblable à une}\\ \text{matrice dont les termes diagonaux sont nuls.}\end{array}}$$

Partie III. Matrices crochets de Lie

1. (a) Soit $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $\varphi(\lambda\mathrm{M}+\mu\mathrm{N}) = (\lambda\mathrm{M}+\mu\mathrm{N})\mathrm{D}-\mathrm{D}(\lambda\mathrm{M}+\mu\mathrm{N}) = \lambda\mathrm{MD}+\mu\mathrm{ND}-\lambda\mathrm{DM}-\mu\mathrm{DN} = \lambda\varphi(\mathrm{M}) + \mu\varphi(\mathrm{N})$. Donc $\boxed{\varphi \text{ est linéaire.}}$

   (b) Soit $\mathrm{M} = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D a pour terme général $\delta_{i,j}d_i = \delta_{i,j}d_j$, donc pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, on a

$$[\mathrm{DM}]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} [\mathrm{D}]_{i,k}\,[\mathrm{M}]_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k}d_i m_{k,j} = d_i m_{i,j} \quad \text{et} \quad [\mathrm{MD}]_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}\delta_{k,j}d_j = d_j m_{i,j}$$

   Donc le terme général de la matrice $\mathrm{MD}-\mathrm{DM}$ est $\boxed{(d_i - d_j)m_{i,j}.}$

   (c) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $m_{i,j}$. On a vu que $\varphi(\mathrm{M})$ a pour terme général $(d_i - d_j)m_{i,j}$, donc $\varphi(\mathrm{M}) = 0$ si et seulement si, pour tous $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$, on a $(d_i - d_j)m_{i,j} = 0$.
   Cette égalité est toujours valable pour $i = j$, et pour $i \neq j$ elle équivaut à $m_{i,j} = 0$ puisque les réels d_i et d_j sont alors distincts. Autrement dit, $\varphi(\mathrm{M}) = 0$ si et seulement si les termes non diagonaux de M sont nuls. Autrement dit, $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est $\boxed{\text{l'ensemble des matrices diagonales.}}$

   (d) Le calcul du terme général de $\varphi(\mathrm{M})$ prouve que cette matrice a toujours ses termes diagonaux nuls, c'est-à-dire que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est inclus dans l'ensemble des matrices dont tous les termes diagonaux sont nuls.
   Or cet ensemble est de dimension $n^2 - n$ (une base en est la famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{i\neq j\in[\![1\,;\,n]\!]}$), et le théorème du rang appliqué à φ donne $\mathrm{rg}\,(\varphi) = \dim\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim\mathrm{Ker}\,\varphi = n^2 - n$, en effet $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathrm{D}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n.
   Donc $\boxed{\mathrm{Im}\,\varphi \text{ est l'ensemble des matrices dont tous les termes diagonaux sont nuls.}}$

N.B. Sans la dimension : si N est une matrice dont les termes diagonaux sont tous nuls, on pose $m_{i,j} = \dfrac{[\mathrm{N}]_{i,j}}{d_i - d_j}$ pour tout $i \neq j$ et l'on choisi les nombres $m_{1,1}, \ldots, m_{n,n}$ arbitrairement. Alors $\varphi(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$.

N.B. En particulier toute matrice dont tous les termes diagonaux sont nuls est de la forme $\mathrm{MD} - \mathrm{DM}$ donc dans Γ.

2. Soit $\mathrm{M} \in \Gamma$, que l'on écrit $\mathrm{M} = \mathrm{XY} - \mathrm{YX}$.

   Soit alors N semblable à M, c'est-̀a-dire de la forme $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$. Alors $\mathrm{N} = \mathrm{P}^{-1}(\mathrm{XY} - \mathrm{YX})\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{XYP} - \mathrm{P}^{-1}\mathrm{YXP}$, et finalement $\mathrm{N} = (\mathrm{P}^{-1}\mathrm{XP})(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{YP}) = (\mathrm{P}^{-1}\mathrm{YP})(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{XP})$, ce qui témoigne du fait que $\mathrm{N} \in \Gamma$.

   Ainsi, $\boxed{\text{toute matrice semblable à une matrice de } \Gamma \text{ est encore dans } \Gamma.}$ En particulier toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice dont les termes diagonaux sont nuls (partie II), matrice qui est dans $\mathrm{Im}\ \varphi$ donc dans Γ ; donc tout matrice de trace nulle est dans Γ.

3. Réciproquement, toute matrice de Γ est de trace nulle, en effet pour tous $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{Tr}(\mathrm{XY} - \mathrm{YX}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{XY}) - \mathrm{Tr}(\mathrm{YX}) = 0$. Donc $\boxed{\Gamma \text{ est exactement l'ensemble des matrices de trace nulle.}}$