Devoir à la maison n° 2 - éléments de correction

1 L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

1.1 L'opérateur de translation

1. Soit $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{X}^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, de degré $d = \deg(\mathrm{P})$ (i.e. $a_d \neq 0$).
Alors, $\tau(\mathrm{P})$ est de la forme :
$$\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) = \sum_{k=0}^{d} a_k(\mathrm{X}+1)^k = a_d \mathrm{X}^d + (da_d + a_{d-1})\mathrm{X}^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k \mathrm{X}^k$$
Comme $a_d \neq 0$, il vient $\boxed{\deg(\tau(\mathrm{P})) = \deg(\mathrm{P}) \text{ et } \mathrm{cd}(\tau(\mathrm{P})) = \mathrm{cd}(\mathrm{P}).}$

2. Notons que $\tau^0(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$. Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que $\tau^k(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k)$, alors $\tau^{k+1}(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \tau(\tau^k(\mathrm{P}))(\mathrm{X}) = \mathrm{P}((\mathrm{X}+k)+1) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+(k+1))$. Ainsi, par récurrence $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \tau(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k).}$

3. D'après la formule du binôme de Newton, $\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau(\mathrm{P}_j)(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}+1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} \mathrm{X}^h = \sum_{i=1}^{j} \binom{j-1}{i-1} \mathrm{P}_i$. M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient donc $\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (\mathrm{M})_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

4. **[Hors-sujet]** La matrice M est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres se trouvent sur la diagonale. Il s'agit des nombres $\binom{j-1}{j-1} = 1$. Comme M et τ ont les mêmes valeurs propres, $\boxed{\mathrm{Sp}(\tau) = \{1\}}$.

   Si M était diagonalisable, elle serait alors semblable à la matrice identité, et donc égale à celle-ci. $\boxed{\text{M n'est pas diagonalisable.}}$

5. M étant clairement inversible (de déterminant 1), $\boxed{\tau \text{ est bijective.}}$

   Puis si on considère $\overline{\tau} : \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \mathrm{P}(\mathrm{X}) \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$, on montre qu'il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

   Il vérifie : $\tau \circ \overline{\tau} = \overline{\tau} \circ \tau = \mathrm{id}$. Donc $\boxed{\tau^{-1}(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)}$ Puis, comme pour la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-k)$. Donc la formule est toujours vraie : $\boxed{\forall k \in \mathbb{Z},\ \tau(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+k).}$

6. Avec l'expression de τ^{-1}, on applique la même méthode qu'en 3 et on obtient : $\forall j \in \mathbb{N}_{n+1},\ \tau^{-1}(\mathrm{P}_j)(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h}(-1)^{j-1-h}\mathrm{X}^h = \sum_{i=1}^{j}(-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1}\mathrm{P}_i$. Puis
$$\boxed{\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ (\mathrm{M}^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i}\binom{j-1}{i-1} & \text{pour} \quad i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

7. La $k+1$-ième ligne du calcul $\mathrm{V} = \mathrm{Q} \times \mathrm{U}$ est justement $v_k = \sum_{j=1}^{n+1} \mathrm{Q}_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} u_j$.

   On peut identifier (après changement d'indice) : $\mathrm{Q}_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour} \quad j \leqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a donc $\boxed{\mathrm{Q} = {}^t\mathrm{M}}$

8. M est inversible, donc $\mathrm{Q} = {}^t\mathrm{M}$ également et $\mathrm{Q}^{-1} = ({}^t\mathrm{M})^{-1} = {}^t(\mathrm{M}^{-1})$. Et donc $\mathrm{V} = \mathrm{Q} \times \mathrm{U}$ donne $\mathrm{U} = \mathrm{Q}^{-1} \times \mathrm{V} = {}^t(\mathrm{M}^{-1}) \times \mathrm{V}$.

   La $k+1$-ième ligne de ce calcul donne alors
$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} \left[{}^t\mathrm{M}^{-1}\right]_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} \left[\mathrm{M}^{-1}\right]_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^{n} \left[\mathrm{M}^{-1}\right]_{j+1,k+1} v_j$$
Soit $\boxed{u_k = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} v_j}$.

9. On a ici $\boxed{v_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda+1)^k}$.

   On vérifie bien que $\boxed{\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (\lambda+1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda+1)-1)^k = u_k}$

1.2 L'opérateur de différence

1. Avec les mêmes notations qu'en 1.1.1, pour P non constant on a :

$$\delta(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = a_d \mathrm{X}^d + (da_d + a_{d-1})\mathrm{X}^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k \mathrm{X}^k - a_d \mathrm{X}^d - a_{d-1}\mathrm{X}^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k \mathrm{X}^k = da_d \mathrm{X}^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k \mathrm{X}^k$$

   Comme $a_d \neq 0$, $\boxed{\deg(\delta(\mathrm{P})) = \deg(\mathrm{P}) - 1 \text{ et } \mathrm{cd}(\delta(\mathrm{P})) = \deg(\mathrm{P}) \times \mathrm{cd}(\mathrm{P}).}$

2. D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(\mathrm{P}) \geqslant 1$ et $\deg(\delta(\mathrm{P})) \geqslant 0$, donc $\delta(\mathrm{P})$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(\mathrm{P}) = 0$, alors P est constant. Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(\mathrm{P}) = 0$. Donc $\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[\mathrm{X}]}$.

   La question précédente montre aussi que $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Or d'après le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = n+1-\dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}])$. Donc : $\boxed{\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}].}$

3. Soit $j < n$, supposons $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[\mathrm{X}]$. Alors

$$\mathrm{P} \in \ker(\delta^{j+1}) \Longleftrightarrow \delta^{j+1}(\mathrm{P}) = 0 = \delta^j(\delta(\mathrm{P})) \Longleftrightarrow \delta(\mathrm{P}) \in \mathbb{R}_{j-1}[\mathrm{X}]$$

   Donc $\mathrm{P} \in \ker(\delta^{j+1}) \Longleftrightarrow \deg(\mathrm{P}) = \deg(\delta(\mathrm{P})) + 1 \leqslant (j-1)+1 = j \Longleftrightarrow \mathrm{P} \in \mathbb{R}_j[\mathrm{X}]$ Ainsi, par récurrence, $\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[\mathrm{X}]}$.

   Si $\mathrm{P} \in \mathrm{Im}(\delta^j)$, alors il existe $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P} = \delta^j(\mathrm{Q})$. Or une récurrence simple montre que $\deg \mathrm{P} = \deg(\mathrm{Q}) - j$ si $\deg \mathrm{P} \geq j$, donc $\deg(\mathrm{P}) \leqslant n - j$. Par conséquent, $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-j}[\mathrm{X}]$, et donc $\mathrm{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[\mathrm{X}]$. Le théorème du rang assure par ailleurs que ces deux espaces ont même dimension, donc $\boxed{\forall j \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[\mathrm{X}]}$.

4. $\delta = \tau - \mathrm{Id}$, et comme δ commute avec l'identité, la formule de Newton donne $\boxed{\delta^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \tau^j.}$

5. Si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(\mathrm{P}) = 0$. Donc $0 = [\delta^n(\mathrm{P})](\mathrm{X}) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \mathrm{P}(\mathrm{X}+j)$.

   Et en particulier, évalué en la valeur 0, on a $\boxed{\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \mathrm{P}(j) = 0.}$

6. (a) $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$. Donc $\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent.}}$

   (b) Comme $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}] = \ker \delta^2$, le cours indique que $\boxed{\mathbb{R}_1[\mathrm{X}] \text{ est stable par } u.}$

   (c) Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = \mathrm{A} \times \mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^2 \times \mathrm{A} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$. Donc $\boxed{\text{aucune matrice A ne vérifie } \mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

   (d) Puisque $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ est stable par u, notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_1[\mathrm{X}], \mathrm{P} \mapsto u(\mathrm{P})$. Considérons alors A, la matrice de $\tilde{u}$ dans la base $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$.

   Alors A^2 est égale à la matrice de δ sur $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ donc $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc $\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \text{ tel que } u^2 = \delta.}$

7. (a) On a vu (question I.2.3) que $\deg(\delta^i(\mathrm{P})) = \deg(\mathrm{P}) - i = d - i$. Ainsi, la famille $(\mathrm{P}, \delta(\mathrm{P}), \dots \delta^d(\mathrm{P}))$ est une famille de degré échelonné (de d à 0). $\boxed{\text{C'est une famille libre et } \mathrm{Vect}(\mathrm{P}, \delta(\mathrm{P}), \dots \delta^d(\mathrm{P})) = \mathbb{R}_d[\mathrm{X}].}$

   (b) Soit V stable par δ. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{V}$ de degré maximal d.
   Alors pour tout i, on a $\delta^i(\mathrm{P}) \in \mathrm{V}$ et donc $\mathbb{R}_d[\mathrm{X}] = \mathrm{vect}(\mathrm{P}, \delta(\mathrm{P}), \dots \delta^n(\mathrm{P})) \subset \mathrm{V}$. Inversement, la maximalité de d donne l'inclusion inverse, et donc $\boxed{\mathrm{V} = \mathbb{R}_d[\mathrm{X}].}$

2 Applications en combinatoire

2.1 Quelques cas particuliers

1. Si φ est une surjection de E sur F, alors nécessairement $\#\mathrm{F} \leqslant \#\mathrm{E}$. Donc $\boxed{\text{si } n > p, \text{ alors } \mathrm{S}(p, n) = 0.}$

2. Une surjection d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection. Donc $\boxed{\mathrm{S}(n, n) = n!.}$

3. Les surjections de $[\![1\,;\, n+1]\!]$ sur $[\![1\,;\, n]\!]$ sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :
   - Le choix de deux éléments de $[\![1\,;\, n+1]\!]$ qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités
   - Puis, la distribution des n éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les n éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) : $n!$ possibilités

   Ainsi, $\boxed{\mathrm{S}(n+1, n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n \times (n+1)!}{2}.}$

2.2 Recherche d'une expression générale

1. Une application de E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est parfaitement définie -et de manière unique- par la donné pour chacun des p éléments de E d'un unique élément de F. Donc pour chacun des p éléments de E, il y a n possibilités. Soit $\boxed{n^p \text{ applications au total.}}$

2. Notons, pour $0 \leq k \leq n$, I_k l'ensemble des applications de $[\![1\,;\, p]\!]$ dans $[\![1\,;\, n]\!]$ dont l'image est de cardinal k. Alors, d'après la question précédente, $n^p = \sum_{k=1}^{n} \#\mathrm{I}_k$.
   Il reste à dénombrer I_k. Or les applications φ de I_k sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :
   - Le choix de k éléments de $[\![1\,;\, n]\!]$ qui constituent l'image : $\binom{n}{k}$ possibilités
   - Puis, le choix d'une surjection de $[\![1\,;\, p]\!]$ sur l'ensemble à k éléments fixés : $\mathrm{S}(p, k)$ possibilités

   Il vient $\boxed{n^p = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{S}(p, k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{S}(p, k).}$ avec la convention $\mathrm{S}(p, 0) = 0$.

3. On applique alors la formule d'inversion trouvée en I.1.8, (p constant)
$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k \Longleftrightarrow u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$
   avec $v_n = n^p$, $u_k = \mathrm{S}(p, k)$, donc $\boxed{\forall p \geqslant n,\ \mathrm{S}(p, n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.}$

4. Pour $p < n$, le polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$, donc d'après I.2.5,
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \mathrm{P}(k) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = \mathrm{S}(p, n)$$
   On peut donc généraliser la formule obtenue à la question précédente : $\boxed{\forall p \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}(p, n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.}$

2.3

1. Avec les questions précédentes :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^n = \mathrm{S}(n,n) = n! \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{n+1} = \mathrm{S}(n+1,n) = \frac{n\times(n+1)!}{2}}$$

3 Étude d'une famille de polynômes

3.1 Généralités

1. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg(\mathrm{H}_k) = k$. La famille $(\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \ldots \mathrm{H}_n)$ est de degrés échelonnés, donc elle est libre. Elle est constituée de $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[\mathrm{X}])$ éléments de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Donc $\boxed{(\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \ldots \mathrm{H}_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}].}$

2. $\delta(\mathrm{H}_0) = 1 - 1 = 0$. Et pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$\delta(\mathrm{H}_k)(\mathrm{X}) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-1}(\mathrm{X}+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1}(\mathrm{X}-j)\right) = \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(\mathrm{X}-j)\right)((\mathrm{X}+1)-(\mathrm{X}-k+1)) \boxed{= \mathrm{H}_{k-1}}$$

3. Comme $\delta = \tau - \mathrm{id}$, on a alors $\tau(\mathrm{H}_0) = \delta(\mathrm{H}_0) + \mathrm{H}_0 = \mathrm{H}_0$ et $\tau(\mathrm{H}_k) = \delta(\mathrm{H}_k) + \mathrm{H}_k = \mathrm{H}_k + \mathrm{H}_{k-1}$.
Ainsi M' est exactement la matrice de τ dans la base $(\mathrm{H}_0, \mathrm{H}_1, \ldots, \mathrm{H}_n)$ de $\mathbb{R}_n$. Par conséquent, $\boxed{\mathrm{M} \text{ et } \mathrm{M}' \text{ sont semblables}}$ comme matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes.

4. Pour tout $k, \ell \in [\![0,n]\!]$, on a (*par récurrence pour $\ell \geqslant k$*) :

$$\delta^k(\mathrm{H}_\ell) = \delta^{k-1}(\mathrm{H}_{\ell-1}) = \begin{cases} \mathrm{H}_{\ell-k} & \text{si} \quad \ell \geqslant k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Or pour $h \neq 0$, on a $\mathrm{H}_h(0) = 0$ et $\mathrm{H}_0(0) = 1$.
Par conséquent $\boxed{\delta^k(\mathrm{H}_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \ell = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.}$

5. Puisque (H_k) est une base de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, il existe $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{P} = \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \mathrm{H}_\ell$. Par linéarité, on a pour tout k, $\delta^k\mathrm{P}(0) = \sum_\ell^n a_\ell \delta^k(\mathrm{H}_\ell)(0) = a_k$. Donc $\boxed{\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n}\delta^k(\mathrm{P})(0)\mathrm{H}_k.}$

3.2 Étude d'un exemple

1. Notons $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 7$. Il s'agit de calculer $\delta^k(\mathrm{T})(0)$, pour k de 0 à 3. Or $\mathrm{T}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 + 5\mathrm{X} + 7$, $\delta(\mathrm{T})(\mathrm{X}) = 3\mathrm{X}^2 + 7\mathrm{X} + 8$, $\delta^2(\mathrm{T})(\mathrm{X}) = 6\mathrm{X} + 10$, $\delta^3(\mathrm{T})(\mathrm{X}) = 6$. On a donc $\boxed{\mathrm{T} = 6\mathrm{H}_3 + 10\mathrm{H}_2 + 8\mathrm{H}_1 + 7\mathrm{H}_0.}$

2. Puisque $\delta^2(\mathrm{H}_k) = \mathrm{H}_{k-2}$, alors par linéarité $\boxed{\mathrm{P} = 6\mathrm{H}_5 + 10\mathrm{H}_4 + 8\mathrm{H}_3 + 7\mathrm{H}_2 \text{ vérifie } \delta^2(\mathrm{P}) = 6\mathrm{H}_3 + 10\mathrm{H}_2 + 8\mathrm{H}_1 + 7\mathrm{H}_0.}$

3. Considérons (p_n) une solution particulière. Toute autre solution (u_n) vérifie $\forall k \in \mathbb{N}$, $(u-p)_{k+2} - 2(u-p)_{k+1} + (u-p)_k = (u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k) - (p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k) = 0$ Donc la suite $(u-p)_n$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
Son équation caractéristique est $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, et il existe $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = p_n + (\mathrm{A} + \mathrm{B}n)1^n$.
Reste à trouver une solution particulière. On a vu que $\delta^2(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - 2\mathrm{P}(\mathrm{X}+1) + \mathrm{P}(\mathrm{X})$. Avec P tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\delta^2(\mathrm{P})(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$ et $p_k = \mathrm{P}(k)$, on a une solution particulière.
Enfin, comme pour $k \geqslant h$, $\mathrm{H}_h(k) = \frac{1}{h!}k(k-1)\ldots(k-(h-1)) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$, et pour $k < h$, $\mathrm{H}_k(h) = 0$; ainsi $\boxed{\text{il existe } \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } k \in \mathbb{N},\ u_k = \mathrm{A} + \mathrm{B}k + 6\tbinom{k}{5} + 10\tbinom{k}{4} + 8\tbinom{k}{3} + 7\tbinom{k}{2}.}$

3.3 Polynômes à valeurs entières

1. Le calcul a été fait plus haut pour les entiers naturels. Si $k<0$, en notant $p=-k$, on a $\mathrm{H}_n(k)=\dfrac{1}{n!}k(k-1)\dots(k-(n-1))=\frac{1}{n!}(-p)(-(p+1))\dots(-(p+n-1))=\dfrac{1}{n!}(-1)^n\dfrac{(p+n-1)!}{(p-1)!}=(-1)^n\binom{p+n-1}{n}$.

   Finalement $\boxed{\mathrm{H}_n(k)=\begin{cases}\binom{k}{n} & \text{si} \quad k\geqslant n\\ 0 & \text{si} \quad k\in[\![0,n-1]\!]\\ (-1)^n\binom{n-1-k}{n} & \text{si} \quad k<0\end{cases}.}$

2. Tous les coefficients binomiaux sont entiers, donc pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\mathrm{H}_n(k)\in\mathbb{Z}$. $\boxed{\mathrm{H}_n(\mathbb{Z})\subset\mathbb{Z}}$.

3. Pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $\delta(\mathrm{P})(k)=\mathrm{P}(k+1)-\mathrm{P}(k)$ Par différence d'entiers, il s'agit d'un nombre entier.

   Donc $\boxed{\text{Si P est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour } \delta(\mathrm{P}).}$

4. Si P est à valeurs entières sur les entiers, alors par récurrence (sur $h\in\mathbb{N}$), pour tout entier $k\in\mathbb{Z}$, $\delta^h(\mathrm{P})(k)\in\mathbb{Z}$; et donc en particulier $\delta^h(\mathrm{P})(0)\in\mathbb{Z}$, et les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers.

   Réciproquement, si les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers, alors P s'écrit $\mathrm{P}=\sum_{i=0}^d a_i\mathrm{H}_i$, donc pour tout $k\in\mathbb{Z}$ on a $\mathrm{P}(k)=\sum_{i=0}^d a_i\mathrm{H}_i(k)\in\mathbb{Z}$ (combinaison entière d'entiers).

   Ainsi, $\boxed{\text{P est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans } (\mathrm{H}_k) \text{ sont entières.}}$

5. Supposons que P, de degré d, est à valeurs entières sur les entiers. D'après les questions précédentes, il existe $a_0,a_1\dots a_d\in\mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{P}=\sum_{i=0}^d a_i\mathrm{H}_i$.

   Et donc $d!\mathrm{P}=\sum_{i=0}^d a_i\times d!\mathrm{H}_i=\sum_{i=0}^d\left(a_i\times d(d-1)\dots(i+1)\times\prod_{j=0}^{i-1}(\mathrm{X}-j)\right)$ soit $\boxed{d!\mathrm{P} \text{ est à coefficients entiers.}}$

   Pour $\mathrm{P}=\frac{1}{2}\mathrm{X}^2$, de degré 2, on a $2!\mathrm{P}$ à coefficients entiers, mais $\mathrm{P}(1)=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$. $\boxed{\text{La réciproque est donc fausse.}}$

4 Généralisation de l'opérateur de différence et application

4.1

1. $x\mapsto x+1$ est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Par composition, $x\mapsto f(x+1)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puis par différence, $\boxed{\delta(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ de } \mathbb{R}_+^*.}$

   Puis pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\delta(f')(x)=f'(x+1)-f'(x)$ et $(\delta(f))'(x)=f'(x+1)-f'(x)$. Donc $\boxed{\delta(f')=(\delta(f))'.}$

2. Même démonstration qu'en I.2.4, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ (\delta^n(f))(x)=\sum_{k=0}^n(-1)^{n-k}\binom{n}{k}f(x+k).}$

3. Soit $x>0$. Appliquons le théorème des accroissements finis à f, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,x+1]$. Il existe $\exists c\in]x,x+1[$ tel que $\delta(f)(x)=f(x+1)-f(x)=f'(c)\times(x+1-x)=f'(c)$. En notant $y_1=c-x$, on a montré qu'il existe $\boxed{y_1\in]0,1[\text{ tel que } \delta(f)(x)=f(x+y_1).}$

4. Soit pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ la propriété "$\forall x>0,\forall f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*),\exists y_n\in]0,n[,\ \sum_{j=0}^n(-1)^{n-j}\binom{n}{j}f(x+j)=f^{(n)}(x+y_n)$"

   - La question précédente montre que $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   - Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie.
     Soit $x>0$, il existe $y_n\in]0,n[$ ($\mathcal{P}_n$ appliquée à $\delta(f)$) tel que :

     $$\delta^{n+1}(f)(x)=\delta^n(\delta(f))(x)=(\delta(f))^{(n)}(x+y_n)$$

     Puis par commutation de l'opération différence et dérivation :

     $$\delta^{n+1}(f)(x)=(\delta(f))^{(n)}(x+y_n)=\delta(f^{(n)})(x+y_n)=f^{(n)}(x+y_n+1)-f^{(n)}(x+y_n)$$

On applique l'égalité des accroissements finis à $f^{(n)}$, il existe $c \in]x+y_n, x+y_n+1[$ tel que

$$f^{(n)}(x+y_n+1) - f^{(n)}(x+y_n) = (f^{(n)})'(c) \times \big((x+y_n+1)-(x+y_n)\big) = f^{(n+1)}(c)$$

Enfin, d'après 4.1.2, $\delta^{n+1}(f)(x) = \sum_{j=0}^{n+1}(-1)^{n+1-j}\binom{n+1}{j} f(x+j) = f^{(n+1)}(c)$.
En prenant $y_{n+1} = c - x$, alors $y_{n+1} \geqslant x + y_n - x \geqslant y_n \geqslant 0$ et $y_{n+1} \leqslant x + y_n + 1 - x \leqslant y_n + 1 \leqslant n+1$. Ainsi, on a donc $\mathcal{P}_{n+1}$ qui est vérifiée.

Ainsi, $\boxed{\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in]0,n[\text{ tel que } \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n).}$

4.2

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Il existe $p_1, \dots, p_i$ des nombres premiers et $a_1, a_2 \dots a_i \in \mathbb{N}$ tel que $k = \prod_{j=1}^{i} p_j^{a_j}$. On a alors $k^\alpha = \prod_{j=1}^{i}(p_j^{a_j})^\alpha = \prod_{j=1}^{i}(p_j^\alpha)^{a_j}$. Il s'agit d'un produit d'entiers naturels non nuls, donc $\boxed{k^\alpha \text{ est un entier naturel non nul.}}$

2. Si $\alpha < 0$, alors $2^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} < 1$, ce qui est absurde puisque $2^\alpha \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}_+.}$

3. Si α est un entier naturel, alors $f_\alpha^{(\alpha)} = \alpha!$ et donc $f_\alpha^{(\alpha+1)} = 0$; donc l'une au moins des dérivées de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.

   Réciproquement, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 > 0$ tels que $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0 = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)x_0^{\alpha-n}$, alors comme $x_0 > 0$, on a nécessairement $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1) = 0$. Et donc il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\alpha - k = 0$ donc $\alpha = k \in \mathbb{N}$. Ainsi $\boxed{\alpha \in \mathbb{N} \text{ ssi il existe } n \in \mathbb{N} \text{ et } x_0 > 0 \text{ tels que } f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0.}$

4.3

1. D'après 4.2.1, pour tout k entier, $k^\alpha \in \mathbb{N}$, donc pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$ puisque x est entier.

   Puis par combinaison entière d'entiers, on a $\boxed{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}.}$

2. Soit $y_n \in]0, n[$ tel que $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = f_\alpha^{(n)}(x+y_n) = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{(x+y_n)^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}}$.

   Comme $y_n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \leqslant \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-\lfloor\alpha\rfloor)}{x^{\lfloor\alpha\rfloor+1-\alpha}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

3. Comme cette limite pour en $+\infty$ est nulle, on peut prendre $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$; il existe $\mathrm{A} > 0$ tel que pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$ et entier : $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x+j) \in]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}[$.
   Or cette somme est entière, donc elle est nécessairement nulle.
   Ainsi, pour tout $x \geqslant \mathrm{A}$, $\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j} f_\alpha(x+j) = 0 = f^{(n)}(x+y_n)$.

   Donc, une dérivée de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif. D'après 4.2.3, $\boxed{\alpha \text{ est donc un entier naturel.}}$